PREPARATION A L'AGREGATION: ANALYSE

Exercices et rappels de cours pour le 18-X-2000

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Théorème: Si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact, la fonction limite f est holomorphe dans Ω.

Que se passe t'il lorsque la convergence n'est plus uniforme ?

L'objectif de ce qui suit est de construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ qui converge simplement en tout point x d'un ouvert Ω vers un $f(x)$ fini mais avec $x \longmapsto f(x)$ non holomorphe sur Ω.

On introduit les demi-disques D_- et D_+ situés de part et d'autre de l'axe imaginaire:
$D_- := \{z; |z| \leq 1 \text{ et } \Re z \leq 0\}$ $\quad D_+ := \{z; |z| \leq 1 \text{ et } \Re z \geq 0\}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le compact:
$K_n := \left(\frac{1}{2n} + D_-\right) \cup \left(\frac{1}{n} + D_+\right)$.
On note g_n la foncion définie sur K_n selon:
$g_n(z) = 0$ si $z \in \left(\frac{1}{2n} + D_-\right)$.
$g_n(z) = 1$ si $z \in \left(\frac{1}{n} + D_+\right)$.

Théorème de Runge: (pour plus de détails voir Rudin page 248)
Soit K un compact du plan, $\mathcal{S}^2 \setminus K$ étant connexe, et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, où Ω est un ouvert contenant K. Alors il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes tels que P_n converge uniformément vers f sur K.

En appliquant le théorème de Runge aux compacts K_n et aux fonctions $g_n \in \mathcal{H}(\Omega_n)$ avec Ω_n convenablement choisi, trouver une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \| P_n - g_n \|_{L^\infty(K_n)} = 0.$$

Conclure en regardant ce qui se passe sur le disque $D(0, 1/2]$ (de centre 0 et de rayon $1/2$).

La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée sur $D(0, 1/2]$?