PREPARATION A L'AGREGATION: ANALYSE

Pour le 29-XI-2000

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On introduit:
$\{x\} := x - E(x), \quad E(x) \leq x < E(x)+1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad E(x) \in \mathbb{Z}.$
Soit h une fonction mesurable bornée sur $[0,1]$. On pose:
$M_n(h) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} h(\{x_k\}), \quad M(h) = \int_0^1 h(x)\, dx.$

Définition: On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 (on note en abrégé ERM1) si pour tout couple $(a,b) \in [0,1]^2$ avec $a \leq b$, on a:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n}\, Card\, \{\, k \in \mathbb{N}^* ;\ 1 \leq k \leq n\ ,\ a \leq \{x_k\} \leq b\,\} \;=\; b - a.$$

Problème

1) Montrer à la main que la suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est ERM1.

2) Etablir l'équivalence entre les trois propriétés suivantes:

i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ERM1.

ii) Pour tout h Riemann intégrable sur $[0,1]$, on a:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} M_n(h) = M(h).$$

iii) Pour tout h continue sur $[0,1]$ et telle que $h(0) = h(1)$, on a:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} M_n(h) = M(h).$$

iv) (critère de Weyl) Pour tout $l \in \mathbb{Z}^*$, on a:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2\,i\,\pi\,l\,x_k} = 0.$$

3) Soit $\alpha \in [0,1]\setminus\mathbb{Q}$. On pose $x_n = n\,\alpha$ Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est ERM1.

4) La propriété ii) reste t'elle vraie si on remplace "Riemann intégrable" par "Lebesgue intégrable" ?

5) Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et telle que:

a) f' décroit, $f' > 0$ et $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f'(x) = 0$.

b) $\lim_{x\longrightarrow+\infty} x\, f'(x) = +\infty$.

En utilisant la formule d'Euler-Mac-Laurin à l'ordre 1, montrer que la suite $\big(f(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est ERM1.