**PREPARATION A L'AGREGATION: ANALYSE**

*SUR LES RAPPELS*

*Pour le 03-X-2001*

__Exercice I.__ *Limite supérieure et limite inférieure.*

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ ensemble mesuré. $f_n, f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ fonctions mesurables.

On rappelle:

**Lemme** (Fatou).

$$\int_X \liminf f_n(x) \;\, d\mu \;\leq\; \liminf \int_X f_n(x) \;\, d\mu \,.$$

On supppose:

$i)$ $$\lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(x) \;=\; f(x) \; \mu\text{-presque partout dans } X.$$

$ii)$ $$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_X |f_n(x)| \;\, d\mu \;=\; \int_X |f(x)| \;\, d\mu \,.$$

I.1) On pose $g_n(x) := |f(x)| + |f_n(x)| - |f(x) - f_n(x)|$. Appliquer le lemme de Fatou à la suite de fonctions $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

I.2) En déduire:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_X |f_n(x) - f(x)| \;\, d\mu \;=\; 0 \,.$$

__Exercice II.__ *Règle d'Abel.*

$s, a_n \in \mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(s) = \frac{a_n}{n^s}$. On appelle série de Dirichlet associée à la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ la série dont le terme général est $u_n(s)$. On introduit:

$$\bar{\mathbb{R}} \ni \sigma_c := \inf \left\{ x \in \mathbb{R} \,;\, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x} \text{ est convergente} \right\}.$$

II.1) On fixe $s_0$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que la série de Dirichlet est convergente pour $s = s_0$. Montrer que la série de Dirichlet converge pour tout $s$ dans $\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\, s_0$.

II.2) Dessiner (utiliser $\sigma_c$) le domaine de convergence (c'est une partie de $\mathbb{C}$) de la série de Dirichlet.

**Exercice III.** *Convergence simple, uniforme et normale.*

On considère la série de fonctions dont le terme général est:

$u_n(x) = x\, e^{-n\,x} / \ln n, \qquad x \in I = [0, +\infty[, \qquad n \geq 2\,.$

III.1) Etudier la convergence simple sur $I$ de cette série.

III.2) Montrer qu'elle n'est pas normalement convergente sur $I$.

III.3) Montrer qu'elle est uniformément convergente sur $I$.

**Exercice IV.** *Série entière.*

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ une série entière qui possède un rayon de convergence $R$ strictement positif.

IV.1) Soit $r$ avec $0 < r < R$. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, r^n\, e^{i\,n\,\theta}$ converge uniformément sur le torre $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\,\pi\,\mathbb{Z})$.

IV.2) Calculer (en fonction de $a_n$ et $r$) le $n-$ième coefficient de Fourier de l'application périodique $\theta \longmapsto f(r\, e^{i\,\theta})$.

IV.3) Etablir les *inégalités de Cauchy* à savoir:

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^n} \sup_{|z|=r} |f(z)|, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

IV.4) On suppose $R = 1$. On se donne $\alpha \in ]0, 1[$. On se place sous la condition:

$\exists\, C_1 > 0; \qquad |f(z)| \leq C_1\, (1 - |z|)^{-\alpha}, \quad \forall\, z$ avec $|z| < 1\,.$

Etablir l'information (indication: on pourra appliquer la $n-$ième inégalité de Cauchy avec $r = 1 - \frac{1}{n}$):

$\exists\, C_2 > 0; \qquad |a_n| \leq C_2\, n^{\alpha}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*\,.$