PREPARATION A L'AGREGATION: ANALYSE

Pour le 24-I-2001

Problème

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On se donne $f : U \longmapsto \mathbb{R}^p$ une application de classe C^∞.

A. Dans cette partie, on suppose que le rang $rg(x)$ de la matrice Jacobienne $Df(x)$ est constant sur U, égal à un entier $r \leq p$. L'objectif est de montrer qu'il existe un changement de coordonnées locales $x \longmapsto X$ au départ (au voisinage d'un point a de U) et un changement $y \longmapsto Y$ à l'arrivée (au voisinage du point $f(a)$ de $\mathbb{R}^p$) qui transforment f en l'application linéaire A (de rang r):
$A \,:\, X = (X_1, \ldots, X_r, X_{r+1}, \ldots, X_n) \longmapsto Y = (X_1, \ldots, X_r, 0, \ldots, 0)$.

1) Montrer qu'on peut se ramener au cas:
$a = 0, \quad f(a) = 0, \quad Df(a) = A.$

2) Montrer qu'on peut résoudre le problème via un changement de coordonnées de la forme:
$X_1 = f_1(x)\,, \ldots, X_r = f_r(x)\,, X_{r+1} = x_{r+1}\,, \ldots, X_n = x_n$
$y_1 = Y_1\,, \ldots, y_r = Y_r$
$y_{r+1} = \varphi_{r+1}(Y_1, \ldots, Y_r) + Y_{r+1}\,, \ldots, y_p = \varphi_p(Y_1, \ldots, Y_r) + Y_p$
où les applications f_i et φ_i sont à choisir convenablement.

3) Que se passe t'il si $r = p$? Si $r = n$? Si $r = n = p$?

4) On suppose $n = p = 2$ et $r = 1$. On considère le système d'équations $f(x, y) = (u, v)$ où le couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ est fixé. Discuter l'existence ou non de solutions.

5) On suppose $p = r = 1$. Soit $g \in C^\infty(U; \mathbb{R})$ une fonction à support compact dans U. Prouver que l'application:

$$F \,:\, \mathbb{R} \ni t \longmapsto F(t) := \int_U g(x)\; e^{i\,t\,f(x)}\; dx \,\in \mathbb{C}$$

est à décroissance rapide (c'est à dire $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$).

B. On se place dans le cas $p = 1$ avec U qui contient l'origine. On suppose que:

$$rg(0) = 0, \quad rg(x) \neq 0, \quad \forall\, x \in U \setminus \{0\}$$

et que la forme quadratique hessienne $D^2 f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n - p)$.

1) Etablir l'existence d'un difféomorphisme $x \longmapsto u = \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, de classe C^1, tel que $\varphi(0) = 0$ et:
$f(x) = f\big(\varphi^{-1}(u)\big) = f(0) + u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2.$

2) Etudier le comportement asymptotique au voisinage de $\pm\infty$ de l'expression F introduite en A.5). La fontion F est-elle encore à décroissance rapide ?

3) On travaille dans cette question avec $n = 2$. Décrire, suivant la signature de la matrice $D^2 f(0)$, l'aspect (au voisinage de 0) de la surface S d'équation $z = f(x, y)$.

4) Trouver des conditions suffisantes pour que la fonction f admette un maximum strict (resp un minimum strict) en 0.

5) On se donne $g = (g_1, \ldots, g_p) : U \longmapsto \mathbb{R}^p$ une application de classe C^∞, de rang p en 0, vérifiant $g(0) = 0$. On pose $V := g^{-1}(\{0\})$. On suppose que la restriction de f à V admet un extremum local en 0. Montrer qu'il existe des coefficients réels (appelés *multiplicateurs de Lagrange*) tels que:
$Df(0) = \lambda_1 \, Dg_1(0) + \ldots + \lambda_p \, Dg_p(0)\,.$

6) Etablir la validité de l'inégalité:
$x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 \, x_1 + \ldots + \alpha_n \, x_n$
sur le domaine:
$x_i \geq 0, \qquad \alpha_i > 0, \qquad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\,.$