PREPARATION A L'AGREGATION: ANALYSE

Exercices pour le 17-I-2001

Exercice I

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les valeurs propres de la matrice A sont des fonctions continues des coefficients de A.

Exercice II

Soit $\mathcal{C} := \{z \in \mathbb{C};\ r_1 < |z| < r_2\}$ où r_1 et r_2 sont des nombres positifs donnés. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathcal{C}$.

II.1. Montrer que f se décompose sous la forme:

$f(z) = f_1(z) + f_2(\frac{1}{z}), \quad \forall\, z \in \mathcal{C}$,

où f_1 et f_2 sont respectivement des fonctions holomorphes sur les disques $D(0, r_1^{-1}[$ et $D(0, r_2[$.

II.2. Prouver l'existence et l'unicité d'une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(c_n\, z^n + c_{-n}\, z^{-n})$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathcal{C}$.

II.3. Application. On prend:

$$f(z) \;=\; \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 3.$$

Déterminer les coefficients c_n. Calculer de deux façons $\int_\gamma f(z)\,dz$ où γ est le cercle de centre 0 et de rayon 2.

Problème

A. On se donne une fonction a qui vérifie:

$0 < c \leq a(x) \leq C < \infty, \quad \forall\, x \in]0,1[$.

On construit:

$\Lambda := \{\,(x,y)\,;\ \ x \in]0,1[,\ \ |y| < a(x)\,\} \subset \mathbb{R}^2$.

On note $\mathcal{U}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.

A.1. Montrer que l'intérieur Ω de Λ est un ouvert connexe.

A.2. Existe t'il un difféomorphisme C^∞ de Ω à valeurs dans $\mathcal{U}$?

B. On considère une fonction $h = (f, g) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ qui est non constante sur Ω et qui est astreinte à:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \quad \forall\,(x,y) \in \Omega.$$

B.1. Montrer que $h \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2)$.

B.2. Prouver que l'ensemble $h(\Omega)$ est ouvert.

B.3. Construire $H = (F, G) \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2)$ vérifiant:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = f(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = -\,g(x,y).$$

B.4. On suppose de plus que h ne s'annule pas sur Ω. On fixe un entier n impair. Trouver deux fonctions $k \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ et $l \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ telles que l'on ait:

$$f(x,y) = \sum_{j \text{ impair },\ j \leq n} (-1)^{\frac{n-j}{2}}\, C_n^j\, k(x,y)^j\, l(x,y)^{n-j}, \quad \forall\,(x,y) \in \Omega.$$

$$g(x,y) = \sum_{j \text{ pair },\ j \leq n} (-1)^{\frac{n-j-1}{2}}\, C_n^j\, k(x,y)^j\, l(x,y)^{n-j}, \quad \forall\,(x,y) \in \Omega.$$