PREPARATION A L'AGREGATION: ANALYSE

Pour le 22-XI-2000

Exercice

Soit F une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{|x|\longrightarrow+\infty} F(x) = +\infty$ et on considère le problème de Cauchy:

$(*) \qquad x'(t) = -(\nabla F)\big(x(t)\big), \qquad x(t_0) = x_0.$

1) Montrer que l'équation $(*)$ admet une solution maximale unique définie sur $]T_*, T^*[$ et que la fonction $t \longmapsto F\big(x(t)\big)$ est décroissante. En déduire que $T^* = +\infty$.

2) En considérant le cas $n = 1$ et $F(x) = \frac{x^4}{4}$ montrer que l'on peut avoir $T_* > -\infty$.

Problème

Soient E et F deux espaces de Banach. Soit U un ouvert de $E \times F$ et $f : U \longrightarrow \mathcal{L}(E; F)$ une fonction de classe C^1. On appelle solution de l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ une fonction $y = \varphi(x)$ de classe C^1 dans un ouvert $V \subset E$ à valeurs dans F telle que:

i) $\big(x, \varphi(x)\big) \in U, \quad \forall\, x \in V.$

ii) $\varphi'(x) = f\big(x, \varphi(x)\big), \quad \forall\, x \in V.$

1) Soit $(x_0, y_0) \in U$. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout $\xi \in E$ vérifiant $\| \xi \| \leq a$, l'équation différentielle ordinaire:

$\frac{dy}{dt} = f(x_0 + t\,\xi, y) \cdot \xi, \qquad y(0, \xi) = y_0$

admette une unique solution $y(t, \xi)$ définie sur l'intervalle $t \in [-1, 1]$.

On introduit alors $\psi(x) := y(1, x - x_0)$. Montrer que $\psi(x_0) = y_0$ et qu'il existe $r > 0$ tel que l'on ait:

$\psi'(x) \cdot (x - x_0) = f\big(x, \psi(x)\big) \cdot (x - x_0), \quad \forall\, x \in B(x_0, r].$

3) Montrer que l'expression ψ remplit les conditions i) et ii) si et seulement si pour tout x l'application:

$f'_x\big(x, \psi(x)\big) + f'_y\big(x, \psi(x)\big) \circ f\big(x, \psi(x)\big) \in \mathcal{L}\big(E; \mathcal{L}(E, F)\big)$

définit un élément symétrique de $\mathcal{L}_2(E; F)$.

4) Sous quelle condition (nécessaire et suffisante portant sur f), l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ associée à la valeur $\varphi(x_0) = y_0$ possède une solution locale $\big($au sens i) + ii)$\big)$ pour toute donnée $(x_0, y_0) \in U$?

5) Que se passe t'il si $E = \mathbb{R}$?

6) Et si $E = \mathbb{R}^2$? Comparer avec le théorème de Schwartz.