PREPARATION A L'AGREGATION: ANALYSE

Problème pour le cours du 13-XII-2000

I) On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que:

$$p_{\alpha\beta}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \; |x^\beta \, \partial^\alpha \varphi(x)| < \infty, \quad \forall\, (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n.$$

On munit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de la topologie induite par les semi-normes $p_{\alpha\beta}$.

I.1) Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un espace métrique complet.

I.2) Montrer que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact) est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

I.3) Etablir l'inclusion: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

II) On note: $\mathcal{F}\, f(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>}\, f(x) \;\; dx, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

II.1) Montrer que $\mathcal{F}$ agit continûment de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et qu'on a les formules:
$\mathcal{F}(D_j\varphi) = \xi_j\, \hat{\varphi}, \qquad \mathcal{F}(x_j\, \varphi) = -D_j\hat{\varphi}, \qquad D_j := -\, i\, \partial_j.$

II.2) Soit $T \; : \; \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ une application linéaire qui est astreinte à:
$T\, D_j\, \varphi = D_j\, T\, \varphi, \quad T\, x_j\, \varphi = x_j\; T\; \varphi, \quad \forall\, j, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$
Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que l'on ait:
$T\, \varphi(x) = c\; \varphi(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$

II.3) Calculer $\mathcal{F}\,(e^{-|x|^2/2})$.

II.4) Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on pose $R\, \varphi(x) := \varphi(-x)$. En appliquant les questions précédentes à l'opérateur $R \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F}$, montrer que $\mathcal{F}$ définit un isomophisme continu sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Déterminer $\mathcal{F}^{-1}$.

II.5) Pour φ et ψ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, prouver les formules:
$\int \varphi\, \bar{\psi}\; dx = (2\,\pi)^{-n} \; \int \hat{\varphi}\; \bar{\hat{\psi}} \;\; d\xi, \qquad \mathcal{F}(\varphi * \psi) = \hat{\varphi}\; \hat{\psi}.$

II.6) Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ à support compact, contenu dans la boule de centre 0 et de rayon R. Expliquer pourquoi la transformée de Fourier de u s'étend en une fonction analytique (appelée transformée de Fourier-Laplace de u) sur $\mathbb{C}^n$. Etablir l'inégalité:
$\exists\, C > 0\,; \quad |\hat{u}(\zeta)| \, \le \, C\; e^{R\,|Im\,\zeta|}, \quad \forall\, \zeta \in \mathbb{C}^n.$

II.7) Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel et $V^\perp$ son orthogonal. Montrer que la transformée de Fourier de la mesure Euclidienne sur V est égale à $(2\,\pi)^{dim\,V}$ fois la mesure Euclidienne sur $V^\perp$.

III) Soit $A = A_1 + i\,A_2$ une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (autrement dit: $A_1 = {}^tA_1$ et $A_2 = {}^tA_2$). On suppose que A_1 est définie positive. On introduit la Gaussienne:

$v(x) := e^{-<A\,x,x>/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$

III.1) Montrer que $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

III.2) Montrer que A est inversible. On note $B := A^{-1}$ son inverse.

III.3) Etablir l'identité:

$\hat{v}(\xi) = (2\,\pi)^{\frac{n}{2}}\,(det\,B)^{\frac{1}{2}}\,e^{-<B\,\xi,\xi>/2}$

où le sens donné à la racine carrée est à préciser.