PREPARATION A L'AGREGATION: ANALYSE

Problème

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ regroupe les éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note respectivement $det\, A$ et $tr\, A$ le déterminant et la trace de A.

1) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n\,!}\, A^n$ est normalement convergente.

2) On suppose A diagonalisable. Vérifier les identités:

$$e^A = \lim_{n \longrightarrow \infty} (1 + \frac{A}{n})^n, \qquad det\,(e^A) = e^{tr\, A}.$$

Montrer que ces relations restent vraies pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque.

3) Calculer e^A lorsque:
  a) A est diagonalisable.
  b) A est nilpotent.
  c) A est quelconque.

4) Montrer que l'application:

$$\begin{aligned} e \,:\, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \\ A &\longmapsto e^A \end{aligned}$$

est surjective.

5) Montrer que la fonction $y(t) = e^{(t-t_0)\,A}\, x_0$ est l'unique solution de l'équation différentielle:

$$(*) \qquad y'(t) = A\, y(t), \quad y(t_0) = x_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

6) Donner un critère nécessaire et suffisant qui permet de résoudre l'équation $(*)$ avec des solutions qui sont:
  a) Toutes bornées.
  b) Toutes périodiques.

7) Soit $A \,:\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une fonction continue. On appelle résolvante de l'équation différentielle $x'(t) = A(t)\, x(t)$ la solution de:
$\frac{d}{dt}\, R(t,a) = A(t)\, R(t,a), \quad R(a,a) = Id.$
Montrer qu'on a: $R(a+T, t+T) = R(a,t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$

8) On suppose de plus que $A(\cdot)$ est périodique de période $T > 0$. D'après la question 4), il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $R(a, a+T) = e^{T\,B}$. On pose $S(t) := e^{T\,B}\, R(a,t)^{-1}$. Montrer que le changement de variables $z(t) = S(t)\, y(t)$ ramène l'équation $y'(t) = A(t)\, y(t)$ à $z'(t) = B\, z(t)$.

9) Sous les hypothéses du 8), comment savoir si toutes les solutions de l'équation $y'(t) = A(t)\,y(t)$ tendent vers 0 lorsque $t \longrightarrow +\infty$?