PREPARATION A L'AGREGATION: ANALYSE

Problème pour le cours du 6-XII-2000

On introduit le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{U} := \{ z\,;\, z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 \}.$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, on désigne par $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions f qui sont holomorphes sur $\mathbb{U}$ et telles que:

$$\| f \| := \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r\, e^{i\,\theta})|^p \, d\theta \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

I)

I.a) Vérifier que $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel et que l'application $\| \cdot \|$ définit une norme sur $\mathcal{H}$.

I.b) Soient ϱ et r avec $0 < \varrho < r < 1$. En utilisant la formule de Cauchy, montrer que:

$$\sup_{|z|\leq \varrho} |f(z)| \leq \frac{r}{r-\varrho} \, \| f \|, \quad \forall\, f \in \mathcal{H}.$$

I.c) Prouver que $\mathcal{H}$ est un espace de Banach.

II) Désormais $p = 2$. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{U}$ et $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ son développement en série entière dans le disque. Montrer que $f \in \mathcal{H}$ ssi $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < +\infty$ et que, dans ce cas, on récupère:

$$\| f \|^2 = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2.$$

Conclure que $\mathcal{H}$ peut être muni d'une structure hermitienne.

On pose $\partial\mathbb{U} := \bar{\mathbb{U}} \setminus \mathbb{U}$. L'application $\theta \longrightarrow e^{i\,\theta}$ de $\mathbb{R}$ sur $\partial\mathbb{U}$ définit une bijection du torre $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\,\pi\,\mathbb{Z}$ sur $\partial\mathbb{U}$ muni de la structure d'espace mesuré, image de la structure usuelle sur $\mathbb{T}$. Pour $\varphi \in L^2(\partial\mathbb{U})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on pose:

$$|||\varphi||| := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{i\,\theta})|^2 \, d\theta \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \hat{\varphi}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\,\theta})\, e^{-i\,n\,\theta} \, d\theta.$$

On désigne par $\mathcal{B}$ l'espace des fonctions φ qui sont dans $L^2(\partial\mathbb{U})$ et telles que $\hat{\varphi}(n) = 0$ pour tout $n < 0$.

III)

III.a) Pour $\varphi \in \mathcal{B}$, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \hat{\varphi}(n)\, z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

On pose:

$$F(\varphi)(z) := \sum_{n\geq 0} \hat{\varphi}(n)\ z^n, \quad \forall\, z \in \mathbb{U}.$$

III.b) Vérifier que F est une isométrie de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{H}$ et que, pour $\varphi \in \mathcal{B}$, on a:

$$\lim_{r \longrightarrow 1-} \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} |F(\varphi)(r\, e^{i\,\theta}) - \varphi(e^{i\,\theta})|^2\ d\theta \ =\ 0.$$

IV)

IV.a) Montrer que, pour $\varphi \in \mathcal{B}$, $r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a:

$$F(\varphi)(r\, e^{i\,\theta}) \ =\ \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} \varphi(e^{i\,t})\ P_r(\theta - t)\ dt$$

où:

$$P_r(t) \ =\ \frac{1 - r^2}{1 - 2\ r\ \cos\ t + r^2} \ =\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\ e^{i\,n\,t}, \quad 0 < r < 1, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

IV.b) Si de plus φ est continue, établir:

$$\lim_{r \longrightarrow 1-} \sup_{\theta\in\mathbb{T}} |F(\varphi)(r\, e^{i\,\theta}) - \varphi(e^{i\,\theta})| \ =\ 0.$$

En déduire que $F(\varphi)$ se prolonge en une fonction continue sur $\bar{\mathbb{U}}$.