PREPARATION A L'AGREGATION: ANALYSE

Problème pour le cours du 25-X-2000

Pour $l \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on note C^l l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont l fois continûment dérivables.

1) Soit $f \in C^\infty$. On désigne par D_f le sous-espace de C^∞ engendré par les fonctions $f^{(k)}$ avec $k \geq 0$. Caractériser l'ensemble des fonctions f pour lesquelles on a $dim\, D_f < +\infty$.

2) Soit F un sous-espace de C^0 tel que $dim\, F = m$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note δ_x la forme linéaire sur F (masse de Dirac en x) définie par:
$< \delta_x \,, f >= f(x), \quad \forall f \in F.$
En considérant $\{ \delta_x \,,\, x \in \mathbb{R} \}^\perp$, montrer qu'il existe $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ tels que $\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_m}$ soit une base de F^*. Prouver que si $f_1, \ldots, f_m$ est une base de F, on a:
$det\, \left([f_i(x_j)]_{i,j=1,\ldots,n} \right) \neq 0.$

3) Pour $f \in C^0$ et $\tau \in \mathbb{R}$, on définit la fonction f_τ (translatée de f par τ) via:
$f_\tau(x) = f(x - \tau), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$
On note T_f le sous-espace vectoriel engendré par $\{ f_\tau \,;\, \tau \in \mathbb{R} \}$.

Pour les points a) et b) ci-dessous, on suppose donnée $f \in C^0$ telle que $dim\, T_f = n$.

a. Montrer qu'il existe n réels τ_i avec $1 \leq i \leq n$ et n fonctions continues a_i avec $1 \leq i \leq n$ tels que l'on ait:
$f_\tau = \sum_{i=1}^n \; a_i(\tau)\; f_{\tau_i}.$

b. En utilisant une suite régularisante $(\theta_k)_{k \geq 1}$, montrer que les fonctions a_i pour $1 \leq i \leq n$ sont C^∞.

c. Caractériser les fonctions $h \in C^0$ telles que $dim\, T_h \leq n$.