# PREPARATION A L'AGREGATION: ANALYSE

*Exercices pour le 04-X-2000*

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $\Delta_a := \{z\,;\, z \in \mathbb{C},\ \Re z > a\}$. On note:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}, \quad z \in \Delta_1.$$

## Exercice 1

1. Etablir la formule d'Euler-Maclaurin à l'ordre 3:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \frac{f(1)+f(N)}{2}$$
$$+\int_1^N f(t)\, dt + \frac{1}{12}\left[f'(N) - f'(1)\right] + \frac{1}{6}\int_1^N \beta_3(t)\, f'''(t)\, dt.$$

2. Appliquer cette formule pour obtenir:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + \frac{1}{2\,N} - \frac{1}{12\,N^2} + \bigcirc(\frac{1}{N^4}).$$

3. Identifier le prolongement analytique de $\zeta$ à $\Delta_{-2}$.

## Exercice 2

1. Montrer que pour tout $a > 0$, la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^z}$$

converge uniformément sur le fermé $\bar{\Delta}_a$ (on pourra procéder par regroupement de termes). En déduire que sa somme $G$ est une fonction holomorphe sur $\Delta_0$.

2. En sommant séparément les termes pairs et les termes impairs de la série ci-dessus, montrer que pour $z \in \Delta_1$, on a:

$$G(z) = (2^{1-z} - 1)\, \zeta(z).$$

En déduire que $\zeta$ admet un prolongement méromorphe au domaine $\Delta_0$ (comparer avec le résultat obtenu à l'aide de la formule d'Euler Maclaurin). On note $\hat{\zeta}$ ce prolongement. Vérifier que $Res(\hat{\zeta}, 1) = 1$.