Feuille 1

Exercice 1. Soient $\ell \leq n$ deux nombres entiers naturels.

1. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} k, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2, \quad \sum_{k=0}^{n} k^3.$$
2. On donne un nombre $q \in \mathbb{R}$. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} q^k, \ \sum_{k=\ell}^{n} q^k.$$

Exercice 2. Calculer
$$\int_0^3 (1 - \frac{t}{2}) \ dt$$

1. en utilisant la définition (approximation par des fonctions en escalier constantes sur des intervalles $[k/n, (k+1)/n]$) ;
2. en calculant des aires de figures géométriques simples ;
3. en utilisant une primitive.

Exercice 3. Calculer
$$\int_1^2 e^{-t} \ dt$$

1. en utilisant la définition (approximation par des fonctions en escalier constantes sur des intervalles $[k/n, (k+1)/n]$) ;
2. en utilisant une primitive.

Exercice 4. Pour $a > 1$, calculer l'intégrale
$$\int_1^a \frac{1}{x} \ dx$$

1. en découpant l'intervalle avec les nombres $a^{k/n}$, $k = 0, \ldots, n$ (on calcule la somme des aires des rectangles dont les bases sont les intervalles $[a^{k/n}, a^{(k+1)/n}]$ et les hauteurs $a^{-k/n}$ (valeur de la fonction à l'extrémité gauche de l'intervalle), puis on fait tendre n vers l'infini) ;
2. en utilisant une primitive.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t < 0$, $f(t) = 1$ si $t \geq 0$.

1. Tracer le graphe de f.
2. Pour tout x réel, calculer
$$g(x) = \int_0^x f(t) \ dt.$$
3. Tracer le graphe de g.
4. La fonction g est-elle dérivable en tout point ?

Exercice 6. Soit f la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t < -2$, $f(t) = 1$ si $t \in [-2, 0]$, $f(t) = -1$ si $t \in]0, 1[$, $f(t) = 2$ si $t \in [1, 3]$, $f(t) = 0$ si $t > 3$.

1. Tracer le graphe de f.
2. Pour tout x réel, calculer
$$g(x) = \int_{-5}^{x} f(t)\ dt.$$
3. Tracer le graphe de g.

Exercice 7. Soit f la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t < -2$, $f(t) = 1$ si $t \in [-2, 0]$, $f(t) = 2$ si $t \in]0, 1[$, $f(t) = 1$ si $t \in [1, 3]$, $f(t) = 0$ si $t > 3$.

1. Tracer le graphe de f.
2. Comparer
$$\int_{-5}^{5} f(t)\ dt \text{ et } \int_{-10}^{7} f(t)\ dt.$$
2. Pour quelle valeur de c a-t-on
$$\int_{-\infty}^{\infty} cf(t)\ dt = 1\ ?$$
3. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de densité cf si pour tout $a < b$ on a
$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \int_{a}^{b} cf(t)\ dt.$$
Dans ce cas, calculer $\mathbb{P}(X \in [-1, 1])$, $\mathbb{P}(X \in [0, 4])$, $\mathbb{P}(X \geq -1/2)$.
4. Pour tout x réel, calculer
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} cf(t)\ dt.$$
Tracer le graphe de F_X. Cette fonction s'appelle la fonction de répartition de X.
5. Dériver F_X là où c'est possible. Comparer les valeurs obtenues avec celles de cf.
6. Calculer
$$\int_{-\infty}^{\infty} tcf(t)\ dt.$$

Exercice 8. Soit f la fonction définie par $f(t) = 1$ si $t \in [0, 1]$, $f(t) = 0$ sinon.

1. Pour tous nombres réels $a < b$, calculer $\int_a^b f(t)\ dt$.
2. Pour tout x réel calculer
$$g(x) = \int_{0}^{1} f(x - t) f(t)\ dt.$$
3. Tracer le graphe de g.

Exercice 9. Il est assez difficile de déterminer la somme des revenus des humains. Une façon d'obtenir une valeur approximative est d'utiliser le PIB PPA (parité de pouvoir d'achat) qui tient en principe compte des revenus réels des populations. Le PIB PPA mondial en 2018 est estimé à environ 135 mille milliards de dollars internationaux [1]. La population mondiale en 2018 étant à peu près 7,6 milliards, cela représente environ 17800 dollars internationaux par personne.

1. Imaginons un monde fictif dans lequel la répartition des revenus au niveau mondial soit uniforme dans un intervalle $[R, 10R]$ mais dans lequel la moyenne des revenus soit 17800 dollars internationaux par an (estimation du revenu moyen réel). Que vaudrait alors R ?
2. Quel serait alors le revenu median, le revenu correspondant au premier décile, au neuvième décile ?
3. En France en 2018 le PIB PPA par habitant est estimé à 44200 dollars internationaux par habitant. Où se situe le revenu moyen français dans la répartition fictive précédente ?

1. Données du FMI selon Wikipédia.