
Devoir à la maison
à rendre au plus tard le 27/04/2020

Nom :

Prénom :

Problème

On se donne $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, et on considère la matrice symétrique $S := \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Partie I. Dans cette partie, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel.

I.1. Que peut-on dire de S ? Comment peut-on simplifier S dans une base orthonormée bien choisie ? On demande de répéter ci-dessous le contenu du théorème du cours utilisé.

I.2. Que peut-on dire *a priori* sur les valeurs propres de S ?

Les valeurs propres de S sont

I.3. Calculer le polynôme caractéristique $P(\lambda)$ de S .

$P(\lambda) =$

I.4. On admet que la matrice S admet deux valeurs propres distinctes notées λ_1 et λ_2 qui sont telles que $\lambda_1 > \lambda_2$. Déterminer (en fonction de α et de β) les valeurs de λ_1 et λ_2 , ainsi que les multiplicités de ces valeurs propres.

$\lambda_1 =$ de multiplicité

$\lambda_2 =$ de multiplicité

I.5. Trouver le vecteur propre normalisé f_1 de S qui est associé à la valeur propre λ_1 et dont la première composante est positive.

${}^t f_1 =$ (, ,)

I.6. Trouver les deux vecteurs propres normalisés f_2 et f_3 de S qui sont tous deux associés à la valeur propre λ_2 , qui sont compatibles avec le contenu (partiellement complété) des vecteurs colonnes ci-dessous, et qui sont orthogonaux (pour le produit scalaire usuel).

$f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}.$

I.7. Déterminer une matrice Ω orthogonale permettant de diagonaliser S en une matrice diagonale dont les valeurs propres situées en position (i, i) pour i variant de 1 à 3 sont classées par ordre décroissant.

$$\Omega = \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array} \right)$$

Partie II. Tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$ s'écrit $u = {}^t(x, y, z) = \tilde{x}f_1 + \tilde{y}f_2 + \tilde{z}f_3$. Dans cette partie, $\mathbb{R}^3$ est muni de la forme bilinéaire symétrique $\varphi(u, u) = {}^t u S u$ induite par S .

II.1. Déterminer la forme quadratique $q(\cdot)$ associée à la matrice S dans la base canonique.

$$q(x, y, z) =$$

II.2. Déterminer l'expression de la forme quadratique $q(\cdot)$ dans la base (f_1, f_2, f_3) .

$$q(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) =$$

II.3. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur α et β pour que la forme quadratique $q(\cdot)$ soit dégénérée.

II.4. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur α et β pour que la forme quadratique q soit définie positive. **On suppose désormais q définie positive.**

II.5. Montrer qu'on peut trouver une base $(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ qui est orthonormée pour φ et telle que $\tilde{f}_j = \gamma_j f_j$ avec $\gamma_j \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$. Déterminer les γ_j .

$$\gamma_1 = \qquad \qquad \gamma_2 = \qquad \qquad \gamma_3 =$$

II.6. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{D}$ la droite engendrée par le vecteur $\check{u} = {}^t(a, b, c)$, d'équation $\mathcal{D} := \{(as, bs, cs); s \in \mathbb{R}\}$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $\check{u}$ pour que les plans orthogonaux à $\mathcal{D}$ pour φ et pour le produit scalaire euclidien coïncident.

II.7. Ecrire dans la base canonique la matrice P de la projection orthogonale (pour φ) de $\mathbb{R}^3$ sur la droite $D := \{(-s, 0, s); s \in \mathbb{R}\}$.

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array} \right)$$