Feuille de TD n°5
Distributions tempérées et transformation de Fourier

Exercice 1

Montrer que les distributions suivantes sont des distributions tempérées et calculer leur transformées de Fourier :

$$\delta_a, \qquad e^{iax}(a \in \mathbb{R}), \qquad \sin(x), \qquad \sin|x|, \qquad \sin^2(x), \qquad \frac{\sin(x)}{x}, \qquad \mathrm{e}^{-|x|}, \qquad |x|\mathrm{e}^{-|x|}.$$

Exercice 2

1. Soient $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $\phi * \psi = 0$. Montrer que $\phi = 0$ ou $\psi = 0$.
2. Établir le même résultat pour $\phi \in L^1$. Donner un contre-exemple avec $\phi \notin L^1$.

Exercice 3

1. Montrer que si $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ qui converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ vers $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, alors la convergence a aussi lieu dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.
2. Construire une suite de fonctions φ_n de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui converge vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ mais pas dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Exercice 4

1. Montrer que la fonction e^t localement intégrable n'est pas une distribution tempérée.
2. Soit la fonction $f(x) = \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x)$. Montrer que f n'est bornée par aucun polynôme. Montrer que f est une distribution tempérée.

Exercice 5

Soit (a_k) une suite de nombres complexes et

$$T = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \delta_n \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Démontrer que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $p \geq 1$ et $C > 0$ tel que

$$|a_n| \leq C(1+n)^p, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 6

Soit $\lambda > 0$ et la fonction f donnée par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\lambda|x|} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

1. Calculer la transformée de Fourier de f.
2. En déduire la transformation de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
3. En déduire les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,dx, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin(x)x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Exercice 7

Soit H la fonction de Heaviside. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction $H_n(x) = \mathrm{e}^{-x/n} H(x)$.

1. Montrer que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers H dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
2. Calculer la transformée de Fourier de H_n.
3. Déduire les transformées de Fourier de H et de $\mathrm{v}p\left(\frac{1}{x}\right)$
4. Calculer la limite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de la suite

$$f_n(x) = \frac{1-\cos(nx)}{x}.$$