M1 Mathématiques et applications
UFR Mathématiques, Université Rennes

Analyse, Distribution, Fourier
2025 – 2026

Feuille de TD n°4
Convolution de distributions et équations

Exercice 1

Quelques calculs de convolutions.

1. Expliciter $T * \delta_0$ et $T * \delta_a$, avec $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $a \in \mathbb{R}^N$.
2. $f * \mathbf{1}_{[a,b]}$ avec $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathbf{1}_{[c,d]}$ avec a, b, c et d dans $\mathbb{R}$ et $a < b$, $c < d$.
3. $\delta_a * \delta_b$.
4. $\delta_0' * \delta_0'$.
5. Que peut-on dire de $H * f$ avec $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ à support dans $\mathbb{R}^+$?

Exercice 2

Soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et P un polynôme de degré k. Montrer que $S * P$ est également un polynôme de degré au plus k.

Exercice 3

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ à support compact telle que $S * T = T^{(k)}$.
2. Soit T, S dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, S à support compact, et $n \in \mathbb{N}$. Démontrer la formule suivante :

$$x^n(T * S) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^k T) * (x^{n-k} S).$$

Exercice 4

Soit E la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ donnée par la fonction

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad E(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } t - |x| > 0 \\ 0 & \text{si } t - |x| \leq 0. \end{cases}$$

1. Calculer $(\partial^2_{tt} - \partial^2_{xx})E$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
2. En déduire une solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de l'équation

$$(\partial^2_{tt} - \partial^2_{xx})u = f$$

   avec $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ à support compact.
3. Que peut-on dire sur la régularité de u lorsque le second membre de l'équation est dans $\mathcal{D}(\Omega)$, Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5

1. Pour $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ on note

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t,t)\, dt, \qquad \langle T^+, \varphi \rangle = \int_0^\infty \varphi(t,t)\, dt.$$

   Montrer que $T, T^+ \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ et calculer $\partial_1 T + \partial_2 T$ ainsi que $\partial_1 T^+ + \partial_2 T^+$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
2. Soit $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ x_2 \geq |x_1|\}$ et F la fonction indicatrice de D. Calculer les expressions suivantes :

$$\partial_1 F - \partial_2 F \quad \text{et} \quad \partial_1^2 F - \partial_2^2 F \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

3. Soit la fonction $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$E(t, x) = \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}.$$

Calculer $\partial_t E - \partial_x^2 E$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.