

*Feuille de TD n°3  
Opérations sur les distributions et quelques équations*

### Exercice 1

Résoudre dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  l'équation suivante :

$$x^2 T = 2.$$

### Exercice 2

Soit  $\alpha, \beta, s$  des nombres réels tels que  $\alpha \neq \beta$ . On considère la fonction  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$u(t, x) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } x < st \\ \beta, & \text{si } x \geq st. \end{cases}$$

Expliciter une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients  $\alpha, \beta, s$  pour que  $u$  vérifie au sens des distributions l'équation suivante :

$$\partial_t u + \partial_x(u^2) = 0.$$

### Exercice 3

On définit l'application  $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{inx} \varphi(x) dx.$$

1. Montrer que  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

2. Prouver que

$$\tau_{2\pi} T = T \quad \text{et} \quad e^{ix} T = T.$$

3. Montrer que

$$\text{supp } T \subset 2\pi\mathbb{Z}.$$

4. Soit  $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{inx}}{1+n^2}$ . Prouver que

$$f'' - f = -T, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

5. En déduire que

$$f(x) = c(e^{x-\pi} + e^{-x+\pi}) \quad \forall x \in ]0, 2\pi[.$$

D'autre part calculer  $\int_0^{2\pi} f(x) dx$  et  $c$ .

6. Montrer que

$$T_{]-2\pi, 2\pi[} = 2\pi\delta_0 \quad \text{et} \quad T = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2n\pi}.$$

7. En déduire la formule sommatoire de Poisson :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n) e^{inx} = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(x + 2n\pi).$$

## Exercice 4

---

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose

$$T_n = \sum_{k=1}^n \delta_{\frac{1}{k}} - n\delta_0 + \log n\delta'_0.$$

1. Montrer que  $T := \lim T_n$  définit un élément de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .
2. Chercher le support de  $T$ .

## Exercice 5

---

Une distribution  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  est homogène de degré  $p \in \mathbb{R}$  si pour tout  $\lambda > 0$  et  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  on a l'égalité

$$\langle T, \phi(\lambda \cdot) \rangle = \lambda^{-n-p} \langle T, \phi \rangle.$$

1. Montrer que la masse de Dirac et la distribution  $\text{vp} \frac{1}{x}$  sont homogènes, en précisant leur ordre.
2. Déterminer les distributions homogènes de degré -1 sur  $\mathbb{R}$  dont le support est 0.
3. Dans le cas où  $T$  est une distribution associée à une fonction  $f$  de classe  $C^\infty$  quelle est la propriété vérifiée par  $f$  lorsque  $T$  est homogène de degré  $p$  ?
4. Montrer qu'une distribution est homogène de degré  $p$  si et seulement si

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = pT.$$

5. En déduire toutes les distributions homogènes sur  $\mathbb{R}$  de degré 2.

## Exercice 6

---

On considère l'équation suivante dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  :

$$(\star) \quad T'' + T' + \frac{5}{4}T = \delta'_0.$$

1. On pose  $S = e^{\frac{t}{2}}T$ . Quelle est l'équation vérifiée par  $S$  ?
2. On recherche des solutions sous la forme  $S = gH$  où  $g$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  et  $H$  est la fonction de Heaviside.
  - (i) Donner l'équation différentielle que doit satisfaire  $g$  ainsi que les conditions initiales.
  - (ii) En déduire une solution de  $(\star)$ .
3. Quel est l'ensemble des solutions dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  ?