

*Feuille de TD 1*  
*Quelques exercices préparatoires*

### Exercice 1

1. On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ . Démontrer que l'intégrale impropre  $\int_0^\infty f(x) dx$  converge mais que  $f \notin L^1([0, \infty[)$ .
2. Soit la fonction  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$ . Étudier l'appartenance de  $f$  à  $L^1(I)$  en fonction des réels  $\alpha$  et  $\beta$  pour l'intervalle  $I$  étant successivement  $]0, 1/2]$ ,  $[1/2, 1[$ ,  $[2, \infty[$ .

### Exercice 2

Montrer que la fonction  $\chi$  définie sur  $\mathbb{R}^N$  par

$$\chi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{1-|x|^2}} \text{ si } |x| < 1, \quad \chi(x) = 0 \text{ si } |x| \geq 1$$

est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^N$ .

### Exercice 3

Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite quelconque de nombres réels et soit  $\chi$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  telle que

$$\chi|_{[-1,1]} = 1, \quad \text{supp}(\chi) \subset [-2, 2].$$

1. Montrer qu'il existe une suite  $(\epsilon_n)_{n \geq 0}$  de réels positifs tendant vers 0 telle que la série

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \chi\left(\frac{x}{\epsilon_n}\right)$$

définisse une fonction  $f$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. En déduire que pour toute suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  de nombres réels, il existe une fonction  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  telle que

$$f^{(n)}(0) = a_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

3. Interpréter le résultat.

### Exercice 4

Soit les deux fonctions  $f, g$  définies sur  $\mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , bornées et de dérivées bornées. On suppose que  $f$  et  $g'$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$ . Montrer que la fonction  $f * g$  est bien définie et qu'elle est de classe  $C^2$ .

### Exercice 5

1. Soit  $a, b$  deux réels avec  $a < b$  et soit  $f \in L^\infty([a, b])$ . Démontrer que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

2. Soit une partie  $D \subset \mathbb{R}^N$  de mesure bornée et  $f \in L^\infty(D)$ . Alors pour  $1 \leq p \leq \infty$  on a  $f \in L^p(D)$  et

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

### Exercice 6

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

1. Démontrer que pour  $p \in [1, \infty[$  on a  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  avec l'estimation

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{1}{p}}.$$

2. Démontrer que pour tout  $\alpha > 0$  on a

$$\alpha^p \mu(\{x \in \mathbb{R}^d; |f(x)| \geq \alpha\}) \leq \|f\|_{L^p}^p$$

où  $\mu$  désigne la mesure de Lebesgue.

3. Démontrer que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}.$$

### Exercice 7

Soit  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  avec  $p \in [1, \infty[$ . Pour  $h \in \mathbb{R}^d$ , on note  $\tau_h f$  la fonction

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (\tau_h f)(x) := f(x - h).$$

1. Montrer que  $\tau_h$  est une isométrie linéaire de  $L^p(\mathbb{R}^d)$  dans lui-même.

2. Montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_{L^p} = 0.$$

3. Est-ce que le résultat reste vrai pour  $p = \infty$  ?

### Exercice 8

Soient  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$  et  $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$  avec  $p, q \in [1, \infty]$  conjugués.

1. Vérifier que la convolée

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t)g(x - t) dt$$

est une fonction définie partout et bornée sur  $\mathbb{R}^N$  avec

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

2. Vérifier que la convolée  $f * g$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}^N$ .

### Exercice 9

Soit  $A \in \mathbb{R}^N$  mesurable et de mesure de Lebesgue strictement positive. Montrer que  $A - A = \{x - y \mid x, y \in A\}$  est un voisinage de 0. *Indication : on pourra considérer le produit de convolution des fonctions  $f$  et  $\tilde{f}$  avec  $f(x) = \mathbf{1}_{|A}(x)$  et  $\tilde{f}(x) = f(-x)$ .*

### Exercice 10

Soit  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant :

$$(i) \int_{\mathbb{R}} K_n(x) dx = 1, \quad (ii) \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}} |K_n(x)| dx < \infty, \quad (iii) \forall \delta > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq \delta} |K_n(x)| dx = 0.$$

1. Montrer que pour tout  $f \in L^p(\mathbb{R})$  avec  $p \in [1, \infty[$  on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_n * f - f\|_{L^p} = 0.$$

2. Soit les fonctions

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 \quad \text{et} \quad K_n(x) = nK(nx).$$

Montrer que la famille  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vérifie les trois conditions (i), (ii) et (iii).

3. Montrer que

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (1 - |\xi|) e^{ix\xi} d\xi.$$

4. Montrer que pour  $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n (1 - |\xi|/n) \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad \text{au sens } L^1(\mathbb{R}).$$