

Feuille de TD 1
Quelques exercices préparatoires

Exercice 1

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Démontrer que l'intégrale impropre $\int_0^\infty f(x) dx$ converge mais que $f \notin L^1(]0, \infty[)$.
2. Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$. Étudier l'appartenance de f à $L^1(I)$ en fonction des réels α et β pour l'intervalle I étant successivement $]0, 1/2]$, $[1/2, 1[$, $[2, \infty[$.

Exercice 2

Montrer que la fonction χ définie sur \mathbb{R}^N par

$$\chi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{1-|x|^2}} \text{ si } |x| < 1, \quad \chi(x) = 0 \text{ si } |x| \geq 1$$

est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^N .

Exercice 3

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite quelconque de nombres réels et soit χ une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} telle que

$$\chi|_{[-1,1]} = 1, \quad \text{supp}(\chi) \subset [-2, 2].$$

1. Montrer qu'il existe une suite $(\epsilon_n)_{n \geq 0}$ de réels positifs tendant vers 0 telle que la série

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \chi\left(\frac{x}{\epsilon_n}\right)$$

définisse une fonction f de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

2. En déduire que pour toute suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels, il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$f^{(n)}(0) = a_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

3. Interpréter le résultat.

Exercice 4

Soit les deux fonctions f, g définies sur \mathbb{R} de classe C^1 , bornées et de dérivées bornées. On suppose que f et g' sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que la fonction $f * g$ est bien définie et qu'elle est de classe C^2 .

Exercice 5

1. Soit a, b deux réels avec $a < b$ et soit $f \in L^\infty([a, b])$. Démontrer que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

2. Soit une partie $D \subset \mathbb{R}^N$ de mesure bornée et $f \in L^\infty(D)$. Alors pour $1 \leq p \leq \infty$ on a $f \in L^p(D)$ et

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Exercice 6

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

1. Démontrer que pour $p \in [1, \infty[$ on a $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec l'estimation

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{1}{p}}.$$

2. Démontrer que pour tout $\alpha > 0$ on a

$$\alpha^p \mu(\{x \in \mathbb{R}^d; |f(x)| \geq \alpha\}) \leq \|f\|_{L^p}^p$$

où μ désigne la mesure de Lebesgue.

3. Démontrer que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}.$$

Exercice 7

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p \in [1, \infty[$. Pour $h \in \mathbb{R}^d$, on note $\tau_h f$ la fonction

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (\tau_h f)(x) := f(x - h).$$

1. Montrer que τ_h est une isométrie linéaire de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.
2. Montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_{L^p} = 0.$$

3. Est-ce que le résultat reste vrai pour $p = \infty$?

Exercice 8

Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ avec $p, q \in [1, \infty]$ conjugués.

1. Vérifier que la convolée

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t)g(x-t) dt$$

est une fonction définie partout et bornée sur \mathbb{R}^N avec

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

2. Vérifier que la convolée $f * g$ est uniformément continue sur \mathbb{R}^N .

Exercice 9

Soit $A \in \mathbb{R}^N$ mesurable et de mesure de Lebesgue strictement positive. Montrer que $A - A = \{x - y \mid x, y \in A\}$ est un voisinage de 0. *Indication : on pourra considérer le produit de convolution des fonctions f et \tilde{f} avec $f(x) = \mathbf{1}_A(x)$ et $\tilde{f}(x) = f(-x)$.*

Exercice 10

Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions continues sur \mathbb{R} et vérifiant :

$$(i) \int_{\mathbb{R}} K_n(x) dx = 1, \quad (ii) \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}} |K_n(x)| dx < \infty, \quad (iii) \forall \delta > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq \delta} |K_n(x)| dx = 0.$$

1. Montrer que pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $p \in [1, \infty[$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_n * f - f\|_{L^p} = 0.$$

2. Soit les fonctions

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 \quad \text{et} \quad K_n(x) = nK(nx).$$

Montrer que la famille $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie les trois conditions (i), (ii) et (iii).

3. Montrer que

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (1 - |\xi|) e^{ix\xi} d\xi.$$

4. Montrer que pour $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n (1 - |\xi|/n) \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad \text{au sens } L^1(\mathbb{R}).$$