Université de Rennes

Analyse, Distribution, Fourier

Corrigé du CC3 du 17/12/2025

Exercice I. Soit H la fonction d'Heaviside (qui vaut 0 sur $\mathbb{R}_-^*$ et 1 sur $\mathbb{R}_+$). Calculer la dérivée H'. Justifier la réponse.

On a $H' = \delta_0$ puisque pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle H', \varphi\rangle = -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\ dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle.$$

Exercice II. On note $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ la distribution dite "valeur principale de $\frac{1}{x}$". Rappeler la définition de $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ puis identifier le produit $x\,\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$. Justifier la réponse.

On peut donner l'une ou l'autre des définitions suivantes :

$$\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ dx = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\ dx\,.$$

Le produit x vp$(\frac{1}{x})$ est la distribution constante égale à 1, car

$$\langle x\mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), x\varphi\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{x\varphi(x)-(-x)\varphi(-x)}{x}\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ dx\,.$$

Exercice III. Soit $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la distribution associée à la fonction localement intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ déterminée par $f(x) = e^{-|x|}$.

III.1. Dessiner le graphe de f puis montrer qu'il existe une fonction localement intégrable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, à identifier, qui est ajustée de façon à ce que $T_f' = T_g$.

La fonction f est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et avec une dérivée qui admet des limites à gauche et à droite en 0. On peut appliquer la formule des sauts ou obtenir directement que $T_f' = T_g$ avec :

$$g(x) = \begin{cases} +e^{x} & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}_-^*\,, \\ -e^{-x} & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}_+^*\,. \end{cases}$$

III.2. Dessiner le graphe de g puis calculer au sens des distributions T_f''.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^*$, avec une limite égale à $+1$ en $0-$ et à -1 en $0+$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec une dérivée qui admet des limites à gauche et à droite en 0. On peut appliquer la formule des sauts qui donne :

$$T_f'' = T_g' = -2\ \delta_0 + T_f\,.$$

III.3. Résoudre au sens des distributions l'équation différentielle $S'' - S = \delta_0$, c'est à dire identifier *toutes* les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de cette équation.

D'après ce qui précède $-T_f/2$ est une solution particulière. Il faut lui ajouter les solutions de l'équation différentielle homogène $S'' - S = 0$ qui sont de la forme $\alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{x}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

III.4. Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}(\xi)$ de $f(x)$.

C'est un calcul direct

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\ f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x-ix\xi}\ dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x-ix\xi}\ dx\,.$$

Ce qui donne

$$\hat{f}(\xi) = \left[\frac{e^{x-ix\xi}}{1-i\xi}\right]_{-\infty}^{0} - \left[\frac{e^{-x-ix\xi}}{1+i\xi}\right]_{0}^{+\infty} = \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}\,.$$

III.5. Identifier *toutes* les solutions dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de l'équation $S'' - S = \delta_0$.

On commence par trouver une solution particulière. Pour cela, il suffit de remarquer que $-f/2$ étant dans $L^1(\mathbb{R})$, elle est aussi dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, et donc elle convient. On peut aussi passer par Fourier en interprétant l'EDO en $-(1+\xi^2)\,\hat{S} = 1$. Il faut donc que $-2\,\hat{S}(\xi) = 2/(1+\xi^2)$, c'est à dire d'après la question III.4 que $S = f$. Puisque Fourier est un isomorphisme sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, c'est la seule solution. Les expressions de la forme $\alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{x}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ n'étant pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, elles sont éliminées.

III.6. Etant donné $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) := f(x/n)$. On note $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier. Prouver que

$$n\,\mathcal{F}(f_n')(\xi) = \frac{2\,i\,\xi}{(1/n^2) + \xi^2}\,, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}\,.$$

D'une part, on a $\mathcal{F}(f_n')(\xi) = i\xi\,\hat{f}_n(\xi)$. D'autre part, on a $\hat{f}_n(\xi) = n\,\hat{f}(n\xi)$. En utilisant la question III.2, on récupère

$$n\,\mathcal{F}(f_n')(\xi) = in^2\xi\,\hat{f}(n\xi) = \frac{2\,i\,n^2\,\xi}{1+n^2\,\xi^2}\,.$$

III.7. Quelles est la limite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de la suite $\Big(n\,\mathcal{F}(f_n')\Big)_n$? Justifier.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{2\,i\,\xi}{(1/n^2)+\xi^2}\ \varphi(\xi)\ d\xi = \int_0^{+\infty} \frac{2\,i\,\xi}{(1/n^2)+\xi^2}\ \Big[\varphi(\xi)-\varphi(-\xi)\Big]\ d\xi\,.$$

On observe que

$$\left|\frac{2\,i\,\xi}{(1/n^2)+\xi^2}\ \Big[\varphi(\xi)-\varphi(-\xi)\Big]\right| \leq 2\ |\varphi(\xi)-\varphi(-\xi)|/|\xi| \in L^1(\mathbb{R})\,,$$

puisque la singularité en 0 est effacée (fonction prolongeable par continuité) et puisque $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$. Par ailleurs, on dispose des limites ponctuelles

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\,i\,\xi}{(1/n^2)+\xi^2} = \frac{2\,i}{\xi}\,, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^*\,.$$

Le théorème de convergence dominée fournit alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{2\,i\,\xi}{(1/n^2)+\xi^2}\ \varphi(\xi)\ d\xi = 2\,i\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)-\varphi(-\xi)}{\xi}\,.$$

La limite recherchée est donc $2\,i\,\mathrm{vp}(\frac{1}{\xi})$.

III.8. Quelles est la limite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de la suite $(n\,T'_{f_n})_n$? Justifier.

En reprenant le raisonnement du III.1 ; on a accès à $n\,T'_{f_n} = T_{g_n}$ avec

$$g_n(x) = \begin{cases} +e^{x/n} & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^*_-\,, \\ -e^{-x/n} & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^*_+\,. \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $g_n \leq g_1 \in L^1(\mathbb{R})$. Par ailleurs

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^*_-\,, \\ -1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^*_+\,. \end{cases}$$

Le théorème de convergence dominée fournit

$$\lim_{n\to+\infty} n\,T'_{f_n} = 1 - 2\,H\,.$$

III.9. Déduire de ce qui précède la transformation de Fourier de la fonction d'Heaviside H.

Comme $\mathcal{F}$ est un isomorphisme continu sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, en combinant III.7 et III.8, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{F}\Big(n\,T'_{f_n}\Big) = \mathcal{F}(1-2\,H) = \lim_{n\to+\infty} n\,\mathcal{F}(f_n') = 2\,i\,\mathrm{vp}(\frac{1}{\xi})\,.$$

Il s'ensuit que

$$\mathcal{F}H(\xi) = \pi\,\delta_0 - i\,\mathrm{vp}(\frac{1}{\xi})\,.$$

Exercice IV. Soit T la forme linéaire donnée par :

$$\langle T, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x+x^2)\;dx\,, \qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

Montrer que $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, et déterminer son ordre.

Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dont le support est contenu dans K. Soit $R\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $K\subset[-R,R]$. La condition $|x+x^2|\leq R$ implique

$$|x|\leq C(K)/2\,, \qquad C(K) := \sqrt{4\,R+1}+1\,.$$

On a donc

$$|\langle T,\varphi\rangle| \leq C(K)\;\parallel\varphi\parallel_\infty\,,$$

ce qui prouve que T est une distribution d'ordre 0.

Exercice V. Etant donné $N\in\mathbb{N}$, on pose $T_N := \sum_{k=0}^{N}\delta_k*(\delta_1-\delta_0)\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

V.1. Montrer que la suite $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une limite à déterminer.

On commence par remarquer que

$$T_N := \sum_{k=0}^{N}\delta_k*(\delta_1-\delta_0) = \sum_{k=0}^{N}(\delta_{k+1}-\delta_k) = \delta_{N+1}-\delta_0\,.$$

Comme la suite $(\delta_N)_N$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, comme on le voit en testant contre une fonction dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on obtient que $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution $-\delta_0$.

V.2. Calculer la valeur de la somme infinie $\sum_{k=0}^{+\infty}(\delta_k'*\mathbb{1}_{[0,1]})$.

Il suffit d'exploiter V.1 et les règles vues sur les produits de convolution. On a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(\delta_k'*\mathbb{1}_{[0,1]}) = \sum_{k=0}^{+\infty}(\delta_k*\mathbb{1}_{[0,1]}') = \sum_{k=0}^{+\infty}\delta_k*(\delta_0-\delta_1)) = \delta_0\,.$$

Exercice VI.

VI.1. Rappeler la définition de la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Cours.

VI.2. Rappeler la définition d'une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Cours.

VI.3. Montrer que $T := \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\,\delta_n$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. *On a*

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\ |\varphi(n)| \leq |\varphi(0)| + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}\ n^3\ |\varphi(n)|\,.$$

Par ailleurs

$$n^3\ |\varphi(n)| \leq \mathcal{N}_3(\varphi) := \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 3} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha\,\partial_x^\beta \varphi(x)|$$

Et donc

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C\ \mathcal{N}_3(\varphi)\,, \qquad C := \left(1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}\right).$$

VI.4. On rappelle la formule sommatoire de Poisson :

$$\mathcal{F}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n\right) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n} \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R})\,.$$

Ecrire T sous la forme $x\,S$ pour une distribution $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ bien choisie, et en déduire la transformée de Fourier de T.

Il suffit de prendre

$$S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n\,.$$

On a alors

$$\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(xS) = i\,\partial_\xi \mathcal{F}(S) = 2\pi\, i \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta'_{2\pi n}\,.$$