Université de Rennes

Analyse, Distribution, Fourier

Corrigé du CC3

Questions de cours

i) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On se donne $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Définir le produit de convolution $T * S$ en utilisant le produit tensoriel.

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T \otimes S, \varphi(x+y) \rangle \,, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\,.$$

ii) Rappeler la définition de la transformation de Fourier $\mathcal{F}(T)(\xi)$ d'une distribution à support compact $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, ainsi que ses propriétés.

$$\mathcal{F}(T)(\xi) = \langle T, e^{-i\,x\cdot\xi} \rangle$$

qui est une fonction C^∞ à croissance lente (ainsi que ses dérivées).

iii) Que dit la formule de Plancherel dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$?

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(x)\ \bar{\psi}(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (\mathcal{F}\phi)(\xi)\ \overline{\mathcal{F}\psi}(\xi)\ \ d\xi\,.$$

Exercice I. On travaille sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Soit λ un nombre complexe de partie réelle strictement négative. On pose $H_\lambda(x) := e^{\lambda\,x}\,H(x)$ où H est la fonction de Heaviside (qui vaut 1 si $x \geq 0$ et 0 sinon).

I.1) Expliquer pourquoi le produit de convolution $H_\lambda * H_\lambda$ est bien défini.

Pour $\lambda = -\varepsilon + i\,\mu$ avec $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$|H_\lambda(x)| \leq e^{-\varepsilon\,x}\,H(x) \in L^1(\mathbb{R})\,.$$

On a donc $H_\lambda * H_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ avec d'après l'inégalité de Young une norme L^1 controlée par le produit des normes L^1.

I.2) On note H_λ^{*n} la convolée n fois de H_λ (c'est-à-dire $H_\lambda * H_\lambda * \cdots * H_\lambda$ répété n fois). Prouver par récurrence que $H_\lambda^{*n}(x) = x^{n-1}\,H_\lambda(x)/(n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, c'est la définition de H_λ. On suppose la propriété vraie au can n. On écrit alors

$$H_\lambda^{*(n+1)}(x) = (H_\lambda^{*n} * H_\lambda)((x) = \Big(x^{n-1}\,H_\lambda(x)/(n-1)!\Big) * H_\lambda\,,$$

puis on calcule

$$H_\lambda^{*n}(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0\,, \\ \dfrac{1}{(n-1)!}\; e^{\lambda\, x} \displaystyle\int_0^x y^{n-1}\, dy = \dfrac{1}{n!}\; e^{\lambda\, x}\, x^n & si \quad 0 \leq x\,. \end{cases}$$

D'où le résultat au cran $n+1$, et ainsi de suite.

I.3) Montrer que si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on a $e^{\lambda\, x}\,(T * S) = (e^{\lambda\, x}\, T) * (e^{\lambda\, x}\, S)$.

C'est visible par exemple en utilisant le produit tensoriel

$$\begin{aligned} \langle e^{\lambda\, x}\,(T * S), \varphi\rangle &= \langle T * S, e^{\lambda\, x}\,\varphi\rangle = \langle T \otimes S, e^{\lambda\,(x+y)}\,\varphi(x+y)\rangle \\ &= \langle (e^{\lambda\, x}\, T) \otimes (e^{\lambda\, y}\, S), \varphi(x+y)\rangle = \langle (e^{\lambda\, x}\, T) * (e^{\lambda\, x}\, S), \varphi\rangle\,. \end{aligned}$$

I.4) Montrer que si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ alors $H * T$ est une primitive de T.

$$(H * T)' = H' * T = \delta_0 * T = T\,.$$

I.5) On prend $\lambda = -\varepsilon$ avec $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ destiné à tendre vers 0. Calculer $\mathcal{F}(H_{-\varepsilon})(\xi)$.

$$\mathcal{F}(H_{-\varepsilon})(\xi) = \Big[-\frac{e^{-(\varepsilon + i\,\xi)\,x}}{i\,\xi + \varepsilon} \Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{i\,\xi + \varepsilon}\,.$$

I.6) Etablir l'identité $(*)$ ci-dessous, puis en déduire que $\mathrm{vp}(1/x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

$$(*) \qquad \langle \mathrm{vp}(1/x), \varphi\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\; dx + \int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{x}\; dx\,.$$

Par définition

$$\langle \mathrm{vp}(1/x), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\; dx\,.$$

Par conséquent

$$\langle \mathrm{vp}(1/x), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} \Big(\int_{1 \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x}\; dx + \int_{1 \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\; dx \Big) + \int_{|x| \geq 1} \frac{\varphi(x)}{x}\; dx\,.$$

Le premier terme disparaît (par imparité) tandis que le second terme converge par le théorème de convergence dominée applicable car $\varphi(x) - \varphi(0) = O(|x|)$. De $(*)$, on peut déduire

$$|\langle vp(1/x), \varphi\rangle| \leq 2\; \parallel \varphi' \parallel_\infty + \Big(\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \Big)\; \parallel x\,\varphi \parallel_\infty \lesssim \mathcal{N}_1(\varphi)\,,$$

ce qui montre l'appartenance à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

I.7) En exploitant $(*)$, établir que $\mathcal{F}(H_{-\varepsilon})(\xi)$ converge au sens des distributions lorsque $\varepsilon \to 0+$ vers la distribution $\pi\,\delta_0 - i\,\mathrm{vp}(1/\xi)$.

Par construction

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(H_{-\varepsilon})(\xi)\ \varphi(\xi)\ d\xi = -i \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - i\,\varepsilon}\ d\xi\,.$$

On s'inspire de $(*)$ *pour effectuer la décomposition*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - i\,\varepsilon}\ d\xi = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi - i\,\varepsilon}\ d\xi + \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(0)}{\xi - i\,\varepsilon}\ d\xi + \int_{|\xi|\geq 1} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - i\,\varepsilon}\ d\xi$$

On peut facilement passer à la limite (par convergence dominée) dans le premier et le dernier terme de droite. On calcule le second

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\xi - i\,\varepsilon}\ d\xi = \int_{-1}^{1} \frac{\xi + i\,\varepsilon}{\xi^2 + \varepsilon^2}\ d\xi = \int_{-1}^{1} \frac{i}{\varepsilon}\ \frac{1}{1+(\xi/\varepsilon)^2}\ d\xi = i\ \Big[\arctan(\xi/\varepsilon)\Big]_{-1}^{1}\,.$$

Et donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - i\,\varepsilon}\ d\xi = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi}\ d\xi + i\,\pi\ \varphi(0) + \int_{|\xi|\geq 1} \frac{\varphi(\xi)}{\xi}\ d\xi\,.$$

Il suffit alors d'exploiter $(*)$ *pour reconnaitre le résultat escompté.*

I.8) Identifier la distribution $\mathcal{F}(H)$. Justifier la réponse.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *une fonction test. Comme* $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$*, par convergence dominée, on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \langle H_{-\varepsilon}, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon\, x}\ \varphi(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} H(x)\ \varphi(x)\ dx\,.$$

Cela signifie que la famille $H_{-\varepsilon}$ *converge vers* H *au sens de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$*. Et comme la tranformation de Fourier* $\mathcal{F}$ *est continue sur* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$*, la famille* $\mathcal{F}(H_{-\varepsilon})$ *converge vers* $\mathcal{F}(H)$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$*. Avec 1.7) on récupère ainsi*

$$\mathcal{F}(H) = \pi\,\delta_0 - i\ vp(1/\xi)\,.$$

I.9) Expliquer pourquoi $\mathcal{F}(H * H)$ est bien définie en tant que distribution tempérée.

En passant à la limite (pour $\lambda = -\varepsilon$ *avec* $\varepsilon \to 0+$*) dans* $H_\lambda * H_\lambda = x\,H_\lambda$*, on obtient* $H * H = x\,H$ *(ce qui se vérifie aussi par un calcul direct). Comme*

$$|\langle x\,H, \varphi\rangle| \leq \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\ (1+x^2)^2\ |\varphi(x)|\ dx \lesssim \mathcal{N}_4(\varphi)\,,$$

on peut affirmer que $H * H \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$*. Comme la transformation de Fourier agit continûment sur* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$*, on récupère ainsi* $\mathcal{F}(H * H) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$*.*

I.10) Calculer $\mathcal{F}(H * H)$ en fonction des dérivées de $\mathcal{F}(H)$. Peut-on affirmer que la formule $\mathcal{F}(H * H) = \mathcal{F}(H)\,\mathcal{F}(H)$ est vérifiée au sens des distributions ?

$$\mathcal{F}(H * H) = \mathcal{F}(x\,H) = i\,\partial_\xi \mathcal{F}(H)\,.$$

Comme H n'est pas à support compact, on sort du cadre d'application de cette formule. D'ailleurs le produit $\mathcal{F}(H)\,\mathcal{F}(H)$ n'a pas de sens.

I.11) Trouver une solution élémentaire de l'opérateur différentiel $d/dx - \lambda$, c'est-à-dire une solution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de $E' - \lambda\,E = \delta_0$.

On vérifie que $E = H_\lambda$ convient.

Exercice II. On rappelle que pour $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, on définit la transformée de Fourier de f par

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\cdot\xi}\, f(x)\, dx\,, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^2\,.$$

II.1) Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, \varphi(x)\, dx\,. \end{array}$$

est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^2$.

Pour $C = \| f \|_{L^1}$, on a

$$|T_f(\varphi)| \leq C\, \mathcal{N}_0(\varphi)\,, \qquad \mathcal{N}_0(\varphi) = \| \varphi \|_{L^\infty}\ .$$

II.2) Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Exprimer la transformée de Fourier de

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^8 u}{\partial x_2^8} + u$$

en fonction de celle de u.

$$\mathcal{F}\Big(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^8 u}{\partial x_2^8} + u\Big)(\xi) = (\xi_1^4 + \xi_2^8 + 1)\ \mathcal{F}u(\xi)$$

II.3) Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Montrer que l'équation

$$(\star) \qquad \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^8 u}{\partial x_2^8} + u = f$$

admet une unique solution $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$.

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\mathcal{F}f(\xi)}{\xi_1^4 + \xi_2^8 + 1}\Big)$$

II.4) Montrer que si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^2$ alors la solution de $(\star)$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$$\partial_j u(x) = \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{i\,\xi_j\ \mathcal{F}f(\xi)}{\xi_1^4 + \xi_2^8 + 1}\Big)$$

Comme

$$\left|\frac{i\,\xi_j\ \mathcal{F}f(\xi)}{\xi_1^4 + \xi_2^8 + 1}\right| \leq \frac{C\ \parallel f \parallel_{L^1}}{(\xi_1^2 + \xi_2^2 + 1)^{3/2}} \in L^1(\mathbb{R}^2)\,,$$

la fonction $\partial_j u$ est continue en tant que transformée (inverse) d'une fonction L^1.

Exercice III. On considère dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation

$$(E) \qquad\qquad 2\,x\,T' - T = 0\,.$$

III.1) Déterminer toutes les solutions de (E) dont le support est contenu dans le singleton $\{0\}$.

D'après le cours, une distribution dont le support est contenu dans $\{0\}$ s'écrit comme combinaison linéaire finie de dérivées de masses de Dirac, soit

$$T = \sum_{j=0}^{n} c_j\ \delta_0^{(j)}\,.$$

On calccule à part

$$\langle x\,\delta_0^{(j+1)}, \varphi\rangle = (-1)^{(j+1)}\ \langle \delta_0, (x\,\varphi)^{(j+1)}\rangle = (-1)^{(j+1)}\ (j{+}1)\ \varphi^{(j)}(0) = -(j{+}1)\ \langle \delta_0^{(j)}, \varphi\rangle.$$

Par conséquent

$$2\,x\,T' - T = -\sum_{j=0}^{n} (j+2)\ c_j\ \delta_0^{(j)} = 0\,,$$

ce qui est possible seulement si $c_j = 0$ pour tout j. Il n'y a donc pas d'autres solutions que $T = 0$.

III.2) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de (E). Déterminer (on demande une justification) les restrictions T_+ de T à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$. Faire de même (sans justification) pour les restrictions T_- de T à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-^*)$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut diviser par la fonction $x^{-1/2}$ qui est C^∞. On doit avoir

$$\left(\frac{T_+}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2\,x^{3/2}}\;(2\,x\,T_+' - T_+) = 0\,.$$

Après intégration, cela donne

$$\exists\, C_+ \in \mathbb{R}\,, \qquad T_+ = C_+\;\sqrt{x}\,.$$

Sur $\mathbb{R}_-^*$, le même raisonnement conduit à

$$\exists\, C_- \in \mathbb{R}\,, \qquad T_- = C_-\;\sqrt{|x|}\,.$$

III.3) Déduire de ce qui précède la forme générale des solutions de (E).

Les distributions $T_\pm$ se prolongent à $\mathbb{R}_\mp$ suivant $\tilde{T}_\pm = C_\pm\, H(\pm x)\,\sqrt{|x|}$ où H est la fonction d'Heaviside. Par construction, la distribution $T - \tilde{T}_+ - \tilde{T}_-$ vérifie (E) et a son support dans $\{0\}$. Elle vaut donc 0 de sorte que

$$T = C_-\,H(-x)\,\sqrt{|x|} + C_+\,H(x)\,\sqrt{|x|}\,.$$