Université de Rennes

Analyse, Distribution, Fourier

CC3 du 17/12/2025 (durée 1h30)

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :** **Gp TD :**

Exercice I. Soit H la fonction d'Heaviside (qui vaut 0 sur $\mathbb{R}_-^*$ et 1 sur $\mathbb{R}_+$). Calculer la dérivée H'. Justifier la réponse.

Exercice II. On note $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ la distribution dite "valeur principale de $\frac{1}{x}$". Rappeler la définition de $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ puis identifier le produit $x\,\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$. Justifier la réponse.

Exercice III. Soit $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la distribution associée à la fonction localement intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ déterminée par $f(x) = e^{-|x|}$.

III.1. Dessiner le graphe de f puis montrer qu'il existe une fonction localement intégrable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, à identifier, qui est ajustée de façon à ce que $T_f' = T_g$.

III.2. Dessiner le graphe de g puis calculer au sens des distributions T_f''.

III.3. Résoudre au sens des distributions l'équation différentielle $S'' - S = \delta_0$, c'est à dire identifier *toutes* les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de cette équation.

III.4. Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}(\xi)$ de $f(x)$.

III.5. Identifier *toutes* les solutions dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de l'équation $S'' - S = \delta_0$.

III.6. Etant donné $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) := f(x/n)$. On note $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier. Prouver que

$$n\,\mathcal{F}(f_n')(\xi) = \frac{2\,i\,\xi}{(1/n^2) + \xi^2}\,, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}\,.$$

III.7. Quelles est la limite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de la suite $\Big(n\,\mathcal{F}(f_n')\Big)_n$? Justifier.

III.8. Quelles est la limite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de la suite $(n\,T'_{f_n})_n$? Justifier.

III.9. Déduire de ce qui précède la transformation de Fourier de la fonction d'Heaviside H.

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice IV. Soit T la forme linéaire donnée par :

$$\langle T, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x + x^2)\ dx\,, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, et déterminer son ordre.

Exercice V. Etant donné $N \in \mathbb{N}$, on pose $T_N := \sum_{k=0}^{N} \delta_k * (\delta_1 - \delta_0) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

V.1. Montrer que la suite $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une limite à déterminer.

V.2. Calculer la valeur de la somme infinie $\sum_{k=0}^{+\infty} (\delta_k' * \mathbb{1}_{[0,1]})$.

Exercice VI.

VI.1. Rappeler la définition de la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

VI.2. Rappeler la définition d'une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

VI.3. Montrer que $T := \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\,\delta_n$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

VI.4. On rappelle la formule sommatoire de Poisson :

$$\mathcal{F}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n\Big) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n} \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R})\,.$$

Ecrire T sous la forme $x\,S$ pour une distribution $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ bien choisie, et en déduire la transformée de Fourier de T.

Question bonus. On considère sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ la fonction $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ donnée par

$$f(x,y) = (x + i\,y)^{-1}\,, \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\,.$$

Identifier dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ la distribution $\bar{\partial} f$ pour $\bar{\partial} = (\partial_x + i\,\partial_y)$. On demande de justifier la réponse.