M1 - Mathématiques 2024–2025

Université de Rennes

Analyse, Distribution, Fourier

CC3 du 09/12/2024 (durée 1h30)

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :** **Gp TD :**

Questions de cours

i) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On se donne $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Définir le produit de convolution $T * S$ en utilisant le produit tensoriel.

ii) Rappeler la définition de la transformation de Fourier $\mathcal{F}(T)(\xi)$ d'une distribution à support compact $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$.

iii) Que dit la formule de Plancherel pour un couple $(\varphi, \psi) \in S(\mathbb{R}^N)^2$?

Exercice I. On travaille sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Soit λ un nombre complexe de partie réelle strictement négative. On pose $H_\lambda(x) := e^{\lambda x} H(x)$ où H est la fonction de Heaviside (qui vaut 1 si $x \geq 0$ et 0 sinon).

I.1) Expliquer pourquoi le produit de convolution $H_\lambda * H_\lambda$ est bien défini.

I.2) On note H_λ^{*n} la convolée n fois de H_λ (c'est-à-dire $H_\lambda * H_\lambda * \cdots * H_\lambda$ répété n fois). Prouver par récurrence que $H_\lambda^{*n}(x) = x^{n-1} H_\lambda(x)/(n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

I.3) Montrer que si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on a $e^{\lambda x}(T * S) = (e^{\lambda x} T) * (e^{\lambda x} S)$.

I.4) Montrer que si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ alors $H * T$ est une primitive de T.

I.5) On prend $\lambda = -\varepsilon$ avec $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ destiné à tendre vers 0. Calculer $\mathcal{F}(H_{-\varepsilon})(\xi)$.

I.6) Etablir l'identité $(*)$ ci-dessous, puis en déduire que $\mathrm{vp}(1/x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

$$(*) \qquad \langle \mathrm{vp}(1/x), \varphi \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx + \int_{|x| \geq 1} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx\,.$$

I.7) Montrer que $\mathcal{F}(H_{-\varepsilon})(\xi)$ converge au sens des distributions lorsque $\varepsilon \to 0+$ vers la distribution $\pi\,\delta_0 - i\,\mathrm{vp}(1/\xi)$.

I.8) Identifier la distribution $\mathcal{F}(H)$. Justifier la réponse.

I.9) Expliquer pourquoi $\mathcal{F}(H * H)$ est bien définie en tant que distribution tempérée.

I.10) Calculer $\mathcal{F}(H * H)$ en fonction des dérivées de $\mathcal{F}(H)$.

I.11) Trouver une solution élémentaire de l'opérateur différentiel $d/dx - \lambda$, c'est-à-dire une solution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de $E' - \lambda E = \delta_0$.

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice II. On rappelle que pour $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, on définit la transformée de Fourier de f par

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\cdot\xi}\ f(x)\ dx\,, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^2\,.$$

II.1) Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\ \varphi(x)\ dx\,. \end{array}$$

est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^2$.

II.2) Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Exprimer la transformée de Fourier de

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^8 u}{\partial x_2^8} + u$$

en fonction de celle de u.

II.3) Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Montrer que l'équation

$$(\star) \qquad \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^8 u}{\partial x_2^8} + u = f$$

admet une unique solution $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$.

II.4) Montrer que si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^2$ alors la solution de $(\star)$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice III. On considère dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation

$$(E) \qquad 2\,x\,T' - T = 0\,.$$

III.1) Déterminer toutes les solutions de (E) dont le support est contenu dans le singleton $\{0\}$.

III.2) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de (E). Déterminer (on demande une justification) les restrictions T_+ de T à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$.

III.3) Faire de même (sans justification) pour les restrictions T_- de T à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-^*)$.

III.4) Déduire de ce qui précède la forme générale des solutions de (E).