Université de Rennes

Distribution et ANalyse de Fourier

CC3 du 18/12/2023 (durée 1h30)

Les documents ne sont pas autorisés

Question de cours. Soient S et T dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Expliquer comment est définie la convolution de S avec T. Identifier (sous une forme simplifiée) la valeur de $\delta'_a * \delta'_b$.

Exercice I. Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les distributions :

— $T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ associée à la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto n\, g(nx)$;

— $S_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ associée à la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto (n+1)\ \Big[g\Big(x - \dfrac{1}{n+1}\Big) - g(x)\Big]$.

I.1. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et calculer sa limite.

I.2. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et calculer sa limite.

Exercice II. On considère les applications linéaires suivantes de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$:

— $T : \varphi \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x^2)\, dx$;

— $S : \varphi \mapsto \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0+} \Big(\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx - 2\, \frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\Big)$.

II.2. Montrer que T est une distribution. Quel est son ordre ?

II.2. Montrer que S est une distribution. Quel est son ordre ?

Exercice III. On note H la fonction de Heaviside (qui vaut 0 pour $x \leq 0$ et 1 pour $x > 0$). On désigne par H^{*n} le produit de convolution de H par elle-même n fois ($H * H * \cdots * H$ répété n fois).

III.1) Montrer par récurrence que $H^{*n} = x^{n-1}\, H/(n-1)!$.

III.2) Que vaut la dérivée d'ordre n de H^{*n} ?

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice IV. On travaille ici dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

IV.1) Rappeler la définition de la transformation de Fourier dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, puis dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

IV.2) Quelle est la transformation de Fourier de la fonction constante égale à 1 ?

IV.3) Etant donné $c \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g_c(x) := e^{-|x|/c}$. Calculer la transformation de Fourier $\hat{g}_c$ de g_c.

IV.4) Identifier la limite (pour $\mathbb{N} \ni n \to +\infty$) dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ de la suite $(g_n)_n$, et en déduire la limite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ de la suite $(g'_n)_n$.

IV.5) Déterminer $\widehat{g'_n}$.

IV.6) Déduire de ce qui précède la limite (pour $n \to +\infty$) de $\widehat{g'_n}$.

IV.7) On se donne $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ avec $0 < a < b$. On considère l'équation fonctionnelle

$$(\star) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + a^2}\, dt = \frac{1}{x^2 + b^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

d'inconnue la fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$.

IV.7.1) Utiliser la question IV.3) en vue d'interpréter $(\star)$ à l'aide d'opérations impliquant $\hat{g}_{1/a}$ et $\hat{g}_{1/b}$.

IV.7.2) Utiliser la transformation de Fourier pour déterminer les fonctions f qui sont solutions de $(\star)$.

Exercice V. Existe-t-il une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ non nulle telle que

$$\int_{\mathbb{R}} x^k\, f(x)\, dx = 0\,, \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,?$$

Exercice VI. Montrer que la distribution $vp\,(1/x)$ est une distribution tempérée.

Exercice VII. Soit $\alpha \in]-1, 0[$. On considère la distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui est associée à la fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ définie (pour $x \neq 0$) par $f(x) = |x|^\alpha$. Montrer que la dérivée au sens des distributions de T_f est donnée par

$$\langle T'_f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \Big(\varphi(x) - \varphi(-x)\Big)\, dx\,, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$