Université de Rennes

Analyse, Distribution, Fourier

CC2 du 03/11/2025 (durée 45mn)

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :** **Gp TD :**

Question de cours. Soient $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Que vaut $(fT)'$ au sens des distributions, en fonction de f, f', T et T' ?

$$(fT)' = f'T + fT'.$$

Démontrer la formule.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: par définition de la dérivée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\langle (fT)', \varphi \rangle = -\langle fT, \varphi' \rangle = -\langle T, f\varphi' \rangle .$$

Or $(f\varphi)' = f'\varphi + f\varphi'$, et toutes ces fonctions sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, donc

$$\langle (fT)', \varphi \rangle = -\langle T, (f\varphi)' - f'\varphi \rangle = \langle T', f\varphi \rangle + \langle T, f'\varphi \rangle = \langle fT', \varphi \rangle + \langle f'T, \varphi \rangle .$$

Ceci étant vrai pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a bien $(fT)' = f'T + fT'$.

Exercice I. On note $H(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ la fonction de Heavyside.

I.1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer au sens des distributions,

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)\left(e^{\lambda x} H(x)\right) = \delta$$

On remarque que

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)\left(e^{\lambda x}\right) = 0.$$

On applique la question précédente sachant que $H' = \delta$. Ainsi, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\left\langle \left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)\left(e^{\lambda x} H(x)\right), \varphi \right\rangle = \left\langle e^{\lambda x} H'(x), \varphi \right\rangle = \left\langle H', e^{\lambda x}\varphi \right\rangle = \left\langle \delta, e^{\lambda x}\varphi \right\rangle = \varphi(0).$$

La dérivée à calculer vaut δ.

I.2) Soit $\omega > 0$. Calculer au sens des distributions,

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right)\left(\frac{\sin(\omega x)}{\omega} H(x)\right) =$$

On applique successivement la même formule qu'avant :

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right)\left(\frac{\sin(\omega x)}{\omega} H(x)\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(\omega x)}{\omega} H'(x) + \cos(\omega x) H(x)\right) + \omega \sin(\omega x) H(x) \\ &= \frac{\sin(\omega x)}{\omega} H''(x) + 2\cos(\omega x) H'(x).\end{aligned}$$

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et puisque $H' = \delta$,

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\sin(\omega x)}{\omega} H''(x) + 2\cos(\omega x) H'(x), \varphi \right\rangle &= \left\langle H'', \frac{\sin(\omega x)}{\omega}\varphi \right\rangle + 2\left\langle H'(x), \cos(\omega x)\varphi \right\rangle \\ &= -\left\langle H', \left(\frac{\sin(\omega x)}{\omega}\varphi\right)' \right\rangle + 2\varphi(0) \\ &= -\left(\frac{\sin(\omega x)}{\omega}\varphi\right)'(0) + 2\varphi(0) = \varphi(0).\end{aligned}$$

On retrouve donc δ.

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice II. Soit $a > 0$. Trouver la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, lorsque $a \to 0$, de

$$T_a : x \mapsto \frac{a}{x^2 + a^2}.$$

Soit v telle que $v'(x) = \frac{a}{x^2+a^2}$. En choisissant $v(0) = 0$, on a

$$v(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on utilise une intégration par parties,

$$\langle T_a, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} \varphi(x) dx = v(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) \varphi'(x) dx.$$

Le terme intégré est nul car $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pour la dernière intégrale, on peut appliquer le théorème de convergence dominée car $\varphi' \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^{0} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) \varphi'(x) dx + \int_{0}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) \varphi'(x) dx$$

$$\underset{a \to 0}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x) dx + \frac{\pi}{2} \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x) dx = -\pi\varphi(0),$$

donc $\langle T_a, \varphi \rangle \to \pi\varphi(0)$ et T_a tend vers $\pi\delta$.

Exercice III. Soit $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ impaire et à support compact. On considère la suite

$$\psi_n(x) = n^2 \psi(nx).$$

III.1) Déterminer la limite de la suite ψ_n dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, pour $\psi(x) = \tan(x)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle \psi_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} n^2 \psi(nx)\varphi(x) dx.$$

On pose le changement de variable $y = nx$, pour trouver

$$\langle \psi_n, \varphi \rangle = n \int_{\mathbb{R}} \psi(y) \varphi\left(\frac{y}{n}\right) dy = n \int_{-1}^{1} \tan(y) \varphi\left(\frac{y}{n}\right) dy.$$

La formule de Taylor avec reste intégral pour φ donne

$$\varphi\left(\frac{y}{n}\right) = \varphi(0) + \frac{y}{n}\varphi'(0) + \left(\frac{y}{n}\right)^2 \int_0^1 (1 - \theta)\varphi''\left(\frac{\theta y}{n}\right) d\theta.$$

Comme la fonction tan *est impaire,*

$$n \int_{-1}^{1} \tan(y)\varphi(0) dy = n\varphi(0) \int_{-1}^{1} \tan(y) dy = 0.$$

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Par ailleurs,

$$\left| n \int_{-1}^{1} \tan(y) \left(\left(\frac{y}{n}\right)^2 \int_0^1 (1-\theta)\varphi''\left(\frac{\theta y}{n}\right) d\theta \right) dy \right| \leqslant n \int_{-1}^{1} |\tan(y)| \left(\frac{y}{n}\right)^2 \|\varphi''\|_{L^\infty} dy$$
$$\leqslant \frac{1}{n} \|\varphi''\|_{L^\infty} \int_{-1}^{1} |\tan(y)| dy,$$

donc

$$\langle \psi_n, \varphi \rangle = \varphi'(0) \int_{-1}^{1} y \tan(y) dy + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

et finalement

$$\psi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\left(\int_{-1}^{1} y \tan(y) dy \right) \delta_0' \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

III.2) Déterminer la limite de la suite ψ_n dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dans le cas général $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ impaire et à support compact.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *:*

$$\langle \psi_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} n^2 \psi(nx) \varphi(x) dx = n \int_{\mathbb{R}} \psi(y) \varphi\left(\frac{y}{n}\right) dy.$$

Comme ψ *est à support compact, il existe* $M > 0$ *tel que*

$$\langle \psi_n, \varphi \rangle = n \int_{-M}^{M} \psi(y) \varphi\left(\frac{y}{n}\right) dy.$$

On reprend la formule de Taylor pour φ *comme avant, et comme* ψ *est impaire,*

$$n \int_{-M}^{M} \psi(y) \varphi(0) dy = n\varphi(0) \int_{-M}^{M} \psi(y) dy = 0.$$

Par ailleurs,

$$\left| n \int_{-M}^{M} \psi(y) \left(\left(\frac{y}{n}\right)^2 \int_0^1 (1-\theta)\varphi''\left(\frac{\theta y}{n}\right) d\theta \right) dy \right| \leqslant n \int_{-M}^{M} |\psi(y)| \left(\frac{y}{n}\right)^2 \|\varphi''\|_{L^\infty} dy$$
$$\leqslant \frac{M^2}{n} \|\varphi''\|_{L^\infty} \int_{-M}^{M} |\psi(y)| dy,$$

donc

$$\langle \psi_n, \varphi \rangle = \varphi'(0) \int_{-M}^{M} y \psi(y) dy + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

et finalement

$$\psi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\left(\int_{\mathbb{R}} y \psi(y) dy \right) \delta_0' \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Cette intégrale est bien définie, puisque

$$\int_{\mathbb{R}} |y\psi(y)| dy = \int_{-M}^{M} |y\psi(y)| dy \leqslant M \int_{-M}^{M} |\psi(y)| dy = M \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$