Université de Rennes

Analyse, Distribution, Fourier

CC2 du 08/11/2024 (durée 1h)

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :** **Gp TD :**

Questions de cours

i) Rappeler la définition de la valeur principale $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$.

$$\langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), \varphi \rangle = \qquad\qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

ii) Soient $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Rappeler la définition du produit $\chi \cdot T$ et justifier que c'est bien une distribution.

Exercice I. Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de Heaviside ($= 1$ si $x \geq 0$ et $= 0$ sinon).

I.1) Montrer que H est une distribution d'ordre 0.

I.2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la dérivée d'ordre n de H.

$$H^{(n)} =$$

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice II.

II.1) Démontrer l'équivalence :

$$\Big(\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ et } \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 0\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\exists \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,;\ \varphi = \psi'\Big).$$

II.2) En déduire que pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on a $(T' = 0) \Rightarrow (\exists c \in \mathbb{R}, T = c)$.

Exercice III. On considère la valeur principale $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$.

III.1) Démontrer que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est une distribution d'ordre ≤ 1.

III.2) Déterminer le support de $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$. Justifier votre réponse.

III.3) Trouver une solution particulière $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $x\,T' + T = 0$.

$T =$

III.4) Déterminer toutes les solutions de $x\,T' + T = 0$. Justifier la réponse.

III.5) Montrer que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est d'ordre exactement égal à 1. (On pourra utiliser une suite de fonctions test $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subset [\frac{1}{2n}, 2]$ et $\varphi_n \equiv 1$ sur $[\frac{1}{n}, 1]$).

Exercice IV. Trouver les limites des suites de distributions suivantes dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sans justification :

a)

$$\frac{1}{x + i\varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow}$$

b)

$$\frac{\sin(nx)}{x} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow}$$

Exercice V. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque. Trouver une solution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ des équations suivantes :

a) $xT = \delta_0^{(n)}$.

b) $x^2 T = \delta_0$.

c) $x^n T = \delta_0$.