Université de Rennes

Distribution et ANalyse de Fourier

CC2 du 10/11/2023 (durée 1h)

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :** **Gp TD :**

Exercice I. Soient $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

I.1) Rappeler la définition du produit $f\,T$ et montrer que c'est une distribution.

I.2) Que vaut $(f\,T)'$ en fonction de f, f', T et T' ? Démontrer la formule.

Exercice II. Soit $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la distribution qui est associée à la fonction localement intégrable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-|x|}$.

II.1) Donner (sans justification) la valeur de :

$T_f'' - T_f =$

II.2) En déduire l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $T'' - T = \delta_0$.

$\mathcal{S} =$

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice III. Soit H la fonction d'Heaviside (i.e. $H = 1_{\mathbb{R}_+}$).

III.1) Calculer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$(1 \star \delta_0') \star H =$

$1 \star (\delta_0' \star H) =$

III.2) Que peut-on en déduire ?

Exercice IV. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On travaille dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
IV.1) Décrire la structure des distributions dont le support est égal à $\{0\}$.

IV.2) Identifier l'ensemble des solutions de l'équation $x^n T = \delta_0$.

IV.3) Existe-t'il des distributions qui sont homogènes d'ordre $-n$ et qui vérifient l'équation $x^n T = \delta_0$. Justifier la réponse.

IV.4) Identifier l'ensemble des solutions de l'équation $(\cos x)^2\, T = \delta_0$.