Université de Rennes

Analyse, Distribution, Fourier

CC1 du 29/09/2025 (durée 45mn)

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :** **Gp TD :**

Questions de cours. Donner deux définitions distinctes (mais équivalentes dans le cas des fonctions continues) du support de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lorsque :

i) La fonction f est continue.

$$\text{supp } f = \overline{\left\{x; f(x) \neq 0\right\}}.$$

ii) La fonction f est localement intégrable, dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

$$\text{supp } f = \bigcap_{\Omega \in \mathcal{O}(f)} \Omega^c = \left(\bigcup_{\Omega \in \mathcal{O}(f)} \Omega \right)^c, \qquad \mathcal{O}(f) := \{\Omega \text{ ouvert}\,;\ f_{|\Omega} = 0 \text{ p.p. } x\},$$

où "p.p. x" signifie "pour presque tout x" (pour la mesure de Lebesgue).

Exercice I. On se donne une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ qui vaut 0 pour $x \leq 0$ et qui est (strictement) positive pour $x > 0$.

I.1) À l'aide de f construire une fonction $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}_+)$ dont le support est la boule de centre 0 et de rayon 1.

$$F(x) = f(1 - |x|^2), \qquad x = (x_1, x_2), \qquad |x|^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

I.2) À l'aide de F construire une famille régularisante $\{\zeta_\varepsilon\}_{\varepsilon \in]0,1]}$.

$$\zeta_\varepsilon(x) = (1/\varepsilon^2)\ \tilde{F}(x/\varepsilon), \qquad \tilde{F}(x) := F(x)/\Big(\int_{\mathbb{R}^2} F(y)\, dy\Big).$$

Exercice II. Etant donné $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \equiv C_c^\infty(\mathbb{R})$, on considère $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $G(x, y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} \varphi(t)\ dt$.

II.1) Calculer la dérivée partielle de G par rapport à y évaluée au point (x, x). On note $T(\varphi)(x)$ sa valeur.

On note F une primitive de φ. Alors $G(x,y) = F(x+y) - F(x-y)$. On fixe x et on dérive par rapport à y ce qui donne

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = F'(x+y) + F'(x-y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y).$$

On remplace y par x. Il reste

$$T(\varphi)(x) = \frac{\partial G}{\partial y}(x,x) = \varphi(2\,x) + \varphi(0).$$

II.2) Montrer que l'application qui à $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ associe la limite de $T(\varphi)(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ définit une distribution qu'on demande de reconnaître.

Comme φ est à support compact, la limite de $\varphi(2\,x)$ pour x qui tend vers $+\infty$ vaut 0 de sorte que l'application recherchée envoie φ sur $\varphi(0)$. C'est la masse de Dirac en 0, notée δ_0, qui est une distribution d'ordre zéro.

Exercice III. Montrer que l'application T de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$ qui à φ associe $T(\varphi) := \int_0^{+\infty} \varphi(x^2)\, dx$ définit une distribution.

Soit K un compact de $\mathbb{R}$. On peut trouver $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $K \subset [-R,R]$. Alors, par changement de variable $x^2 = y$, pour tout φ vérifiant $\mathrm{supp}\varphi \subset K$, on a

$$|T(\varphi)| \leq \int_0^{R^2} \frac{|\varphi(y)|}{2\sqrt{y}}\, dy \leq C_K \, \parallel \varphi \parallel_\infty, \qquad C_K := \int_0^{R^2} \frac{dy}{2\sqrt{y}} < +\infty.$$

Ceci établit que T est une distribution d'ordre 0 (il est important de localiser car l'intégrale de $1/\sqrt{y}$ diverge en $+\infty$.).

Exercice IV. On considère l'application T de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$ qui à φ associe

$$T(\varphi) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{\{k \in \mathbb{Z}^*;|k| \leq N\}} \frac{1}{k}\, \varphi\Big(\frac{1}{k}\Big).$$

IV.1) Montrer que la limite $T(\varphi)$ est bien définie, et que T définit une distribution.

Le théorème des accroissements finis fournit $c_k \in]-1/k, 1/k[$ ajusté de façon à ce que

$$\varphi\Big(\frac{1}{k}\Big) - \varphi\Big(-\frac{1}{k}\Big) = 2\,\frac{\varphi'(c_k)}{k}.$$

On a donc

$$\Big| \sum_{\{k\in\mathbb{Z}^*;|k|\leq N\}} \frac{1}{k}\, \varphi\Big(\frac{1}{k}\Big) \Big| = \Big| \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{k}\ \frac{\varphi'(c_k)}{k} \Big| \leq 2\ C\ \parallel \varphi' \parallel_\infty, \qquad C := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

La série étant normalement convergente, elle est convergente. Donc $T(\varphi)$ *est bien définie. Et, vue la majoration, cela conduit à une distribution d'ordre* ≤ 1.

IV.2) Montrer que cette distribution est d'ordre 1.

On sait déjà qu'elle est d'ordre ≤ 1. *Il s'agit de prouver qu'elle est d'ordre exactement égal à* 1. *On raisonne par l'absurde. Sinon, pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *vérifiant* $supp\, \varphi \subset [0,1]$, *il existe une constante* C *telle que*

$$(*) \qquad |T(\varphi)| \leq C \parallel \varphi \parallel_\infty .$$

Soit alors $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *qui vaut* 0 *pour* $x \leq 0$, 1 *pour* $x \geq 1$, *et qui est strictement croissante sur* $[0,1]$. *On pose* $\varphi_n(x) := \chi(n\,x)\,\chi(1-x)$. *Alors on a alors* $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. *Par ailleurs* $supp\, \varphi_n \subset [0,1]$ *et* $\parallel \varphi_n \parallel_\infty \leq 1$. *Pour* $N \geq n$, *on a*

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\ \chi\Big(\frac{n}{k}\Big)\,\chi\Big(1-\frac{1}{k}\Big) \geq \chi(1/2) \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

D'où l'on déduit en appliquant $(*)$ *que pour tout* n, *on a*

$$\chi(1/2) \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq T(\varphi_n) \leq C,$$

ce qui est une contradiction du fait de la divergence de la série harmonique.