M1 - Mathématiques 2025–2026

Université de Rennes

Analyse, Distribution, Fourier

CC1 du 29/09/2025 (durée 45mn)

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :** **Gp TD :**

Questions de cours. Donner deux définitions distinctes (mais équivalentes dans le cas des fonctions continues) du support de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lorsque :

i) La fonction f est continue.

supp $f =$

ii) La fonction f est localement intégrable, dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

supp $f =$

Exercice I. On se donne une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ qui vaut 0 pour $x \leq 0$ et qui est (strictement) positive pour $x > 0$.

I.1) À l'aide de f construire une fonction $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}_+)$ dont le support est la boule de centre 0 et de rayon 1.

$F(x) =$

I.2) À l'aide de F construire une famille régularisante $\{\zeta_\varepsilon\}_{\varepsilon \in]0,1]}$.

$\zeta_\varepsilon(x) =$

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice II. Etant donné $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \equiv C_c^\infty(\mathbb{R})$, on considère $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $G(x,y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} \varphi(t)\ dt$.

II.1) Calculer la dérivée partielle de G par rapport à y évaluée au point (x,x). On note $T(\varphi)(x)$ sa valeur.

$$T(\varphi)(x) = \frac{\partial G}{\partial y}(x,x) =$$

II.2) Montrer que l'application qui à $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ associe la limite de $T(\varphi)(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ définit une distribution qu'on demande de reconnaître.

Exercice III. Montrer que l'application T de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$ qui à φ associe $T(\varphi) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x^2)\, dx$ définit une distribution.

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice IV. On considère l'application T de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$ qui à φ associe

$$T(\varphi) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{\{k\in\mathbb{Z}^*; |k|\leq N\}} \frac{1}{k}\,\varphi\Big(\frac{1}{k}\Big).$$

IV.1) Montrer que la limite $T(\varphi)$ est bien définie, et que T définit une distribution.

IV.2) Montrer que cette distribution est d'ordre 1.