

Correction du CC1 de 2026

Exercice 1. On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont des morceaux de graphe $\mathcal{C}_f$ (Figure 1) et $\mathcal{C}_F$ (Figure 2) sont représentés ci-contre.

1. Donner ci-dessous les valeurs de $f(1)$, $f(2)$, ainsi que de $F(1)$ et $F(2)$.

$$f(1) = 1 \qquad f(2) = 4$$

$$F(1) = 2 \qquad F(2) = 4$$

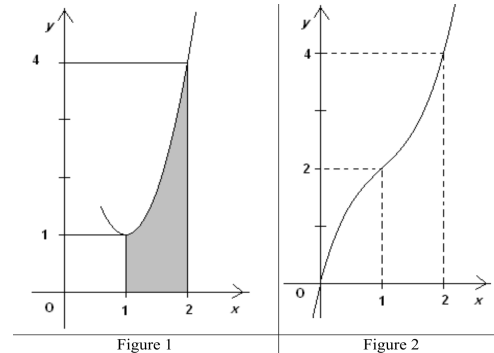


Figure 1
Graphe $\mathcal{C}_f$ de f

Figure 2
Graphe $\mathcal{C}_F$ de F

2. On note $\mathcal{A}$ l'aire hachurée sur la figure 1. Encadrer $\mathcal{A}$ par deux nombres entiers dont la différence est égale à deux.

$$1 \leq \mathcal{A} \leq 3$$

3. Ecrire une formule qui lie le calcul de $\mathcal{A}$ à celui d'une intégrale.

$$\mathcal{A} = \int_1^2 f(x) \, dx$$

4. On suppose que F représente la primitive de f qui s'annule en 0. Utiliser la figure 2 pour obtenir la valeur exacte de $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = F(2) - F(1) = 4 - 2 = 2$$

Exercice 2. Déterminer des primitives F des fonctions f suivantes.

$$f(x) = 2x + 1$$

$$F(x) = x^2 + x$$

$$f(x) = 8x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$F(x) = 2x^4 + 2\sqrt{x}$$

$$f(x) = \sin x - 2 \cos x$$

$$F(x) = -\cos x - 2 \sin x$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$F(x) = \ln(x+1)$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$$

T. S. V. $\implies$

Exercice 3. On considère la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui à t associe t . On a $f(t) = t$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décrire la subdivision de $[0, 1]$ en n sous-intervalles de mêmes longueurs.

$$[0, 1] = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right].$$

2. On pose

$$s_n := \sum_{k=0}^{n-1} k = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1).$$

En écrivant la somme s_n sous une autre forme puis en calculant $s_n + s_n$, trouver la formule qui donne s_n en fonction de n . On demande de justifier le résultat en remplissant d'abord les lignes ci-dessous

$$\begin{array}{rcccccccc} s_n & = & & 1 & + & & 2 & + & \cdots & + & (n-2) & + & (n-1) \\ \oplus s_n & = & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 & & \\ \hline 2s_n & = & n & + & n & + & \cdots & + & n & + & n & & \end{array}$$

puis en donnant la formule explicite conduisant à s_n .

$$s_n = n(n-1)/2$$

3. On note $\mathcal{R}_n$ la somme de Riemann (impliquant les valeurs de f à l'extrémité gauche des sous-intervalles) associée à la fonction f et à la subdivision obtenue en question 1. Exprimer $\mathcal{R}_n$ en fonction de s_n .

$$\mathcal{R}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right) f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \times \frac{k}{n} = \frac{s_n}{n^2}$$

4. Identifier la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite $(\mathcal{R}_n)_n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{R}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

5. Vérifier ce résultat en utilisant une intégrale puis une primitive.

Un théorème du cours affirme que la somme de Riemann converge vers l'intégrale de f sur $[0, 1]$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{R}_n = \int_0^1 t \, dt = [t^2/2]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

On retrouve bien la valeur $1/2$ obtenue à la question 4.